

Fakultet for teknologi, kunst og design

Teknologiske fag

Eksamen i: Diskret matematikk

Målform: Bokmål

Dato: 18.02.2015

Tid: 5 timer / kl. 9 - 14

Antall sider (inkl. forside): 10

Antall oppgaver: 10

Tillatte hjelpemidler:

Forhåndsgodkjent ordbok. Håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst og som ikke kan regne symbolsk.

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig.

Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Besvarelsen skal merkes med kandidatnummer, ikke navn.

Bruk blå eller sort kulepenn på innføringsarket.

Faglig veileder: Ulf Uttersrud

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Instituttleders/ Programkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Instituttleder/ Programkoordinator	
Ulf Uttersrud				

Emnekode: DAPE1300 – ITPE1300

Alle de 10 oppgavene teller likt. I oppgaver med underpunkter vil krevende og mer omfattende underpunkter kunne telle mer enn lette og enkle underpunkter. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave. **Alle svar skal begrunnes!** Det kan for eksempel skje ved at du tar med mellomregninger eller gir andre former for argumentasjon. **Kun et svar uten noen begrunnelse er normalt verdiløst.**

Oppgave 1

- a) (3 poeng) La p være utsagnet: *Jeg gjør alle øvingsoppgavene* og q utsagnet: *Jeg får A til eksamen*. Sett opp flg. utsagn ved hjelp av p , q og logiske operatorer:
- i) Jeg gjør alle øvingsoppgavene og jeg får A til eksamen.
 - ii) Jeg får ikke A til eksamen eller jeg gjør ikke alle øvingsoppgavene.
 - iii) Hvis jeg gjør alle øvingsoppgavene, så får jeg A til eksamen.
 - iv) Jeg får A til eksamen bare hvis jeg gjør alle øvingsoppgavene.
- b) (4 poeng) La p , q og r være utsagn. Avgjør (sannhetsverditabell eller på annen måte) om utsagnene $(p \wedge \neg q) \vee r$ og $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ er logisk ekvivalente.
- c) (3 poeng) Nedenfor står det en sannhetsverditabell med utsagnene p og q . Erstatt spørsmålsteget i tabellen med et sammensatt utsagn i p og q som passer med sannhetsverdiene i kolonnen.

p	q	?
S	S	U
S	U	S
U	S	U
U	U	U

Oppgave 2

- a) (3 poeng) La $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, f, g\}$ og $C = \{b, d, e, f\}$. Sett opp mengdene $B \cap C$, $B - C$, $A \cup (B - C)$ og $(A \cup B) - (B \cap C)$ på listeform, dvs. på formen $\{ \dots \}$.
- b) (3 poeng) La A , B og C være vilkårlige mengder, Tegn Venn-diagram og skravér mengdene $A \cup (B - C)$ og $(A \cup B) - (B \cap C)$.
- c) (4 poeng) La A , B og C være vilkårlige mengder, Skriv $(A \cup (B - C)) - ((A \cup B) - (B \cap C))$ på en så enkel form som mulig.

Oppgave 3

La A være heltallene fra 11 til 35, dvs. $A = \{11, 12, 13, \dots, 33, 34, 35\}$ og la B være heltallene fra 0 til 18, dvs. $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 17, 18\}$. Definer funksjonen $f : A \rightarrow B$ ved at for hver $a \in A$ skal $f(a)$ være produktet av første og andre siffer i a . Det betyr for eksempel at $f(11) = 1 \cdot 1 = 1$ og $f(25) = 2 \cdot 5 = 10$.

- (2 poeng) Finn $|A|$ og $|B|$, dvs. finn antall elementer i A og i B . Skriv opp de tosifrede tallene i B som er primtall.
- (2 poeng) Hva blir $f(20)$, $f(29)$ og $f(35)$?
- (2 poeng) Finn verdimengden til f ?
- (2 poeng) Vi sier at $b \in B$ blir truffet av en pil hvis det finnes en $a \in A$ slik at $f(a) = b$. Hvilken $b \in B$ blir truffet av flest piler?
- (2 poeng) Er f en-til-en? Er f på?

Oppgave 4

Gitt tallmatrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- (2 poeng) Hvilke dimensjoner har A , B og C ?
- (2 poeng) Hvilke av følgende matriseprodukter er definert: AB , BA , AC , CA , BC , CB ? Oppgi dimensjonen til de produktene som er definert.
- (3 poeng) Regn ut produktet AC .
- (3 poeng) Regn ut produktet BA .

Oppgave 5

- (2 poeng) Sett opp binærkoden til tallene 9, 10, 11 og 12.
- (2 poeng) Heltallet $a = 361_{10}$ er gitt på desimal form. Finn det på binær form og på heksadesimal form.
- (2 poeng) Avgjør om tallet $a = 361_{10}$ er et primtall.
- (2 poeng) Heltallet $b = AAAA_{16}$ er gitt på heksadesimal form. Finn det på oktal form og på desimal form.
- (2 poeng) Finn summen $\sum_{k=0}^7 2 \cdot (4^k)$.

Oppgave 6

I denne oppgaven skal vi se på bitsekvenser med lengde 10.

- a) (2 poeng) Hvor mange forskjellige er det?
- b) (2 poeng) Hvor mange forskjellige er det som har **nøyaktig to** 1-biter.
- c) (2 poeng) Hvor mange forskjellige er det som har **nøyaktig to** 1-biter der 1-bitene ikke står ved siden av hverandre.
- d) (4 poeng) Hvor mange forskjellige er det som **ikke** har to 1-biter ved siden av hverandre. For eksempel har 0010110101 og 0111011101 to 1-biter ved siden av hverandre, men det har ikke 0000100000 og 1010101010.

Oppgave 7

Tallene fra og med 100 til og med 999 kalles tresifrede tall. La A være mengden av tresifrede tall med 5 som første siffer, B mengden av tresifrede tall med 5 som andre siffer og C mengden av tresifrede tall med 5 som siste siffer. Symbolet $| \cdot |$ står for kardinaliteten til mengden, dvs, antallet forskjellige elementer.

- a) (2 poeng) Finn $|A|$, $|B|$ og $|C|$.
- b) (2 poeng) Finn $|A \cap B|$, $|B \cap C|$, $|A \cap C|$ og $|A \cap B \cap C|$.
- c) (2 poeng) Bruk det du fant i a) og b) til å finne $|A \cup B \cup C|$.
- d) (2 poeng) Finn på en direkte måte antallet tresifrede tall som ikke har 5 som siffer. Bruk så det til å finne $|A \cup B \cup C|$.
- e) (2 poeng) Hvor mange tresifrede tall har 21 som tverrsum? Tallene 489 og 588 er eksempler på slike tall.

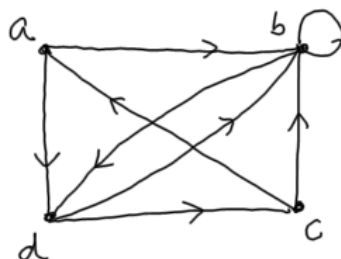
Oppgave 8

Gitt differensligningen $a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 2$.

- a) (2 poeng) Finn a_2 og a_3 .
- b) (6 poeng) Finn en formel for a_n . Vis at formelen din stemmer ved å sette inn $n = 2$ og 3 . Da skal du få de samme resultatene som i punkt a).
- c) (2 poeng) Finn a_7 ved å sette inn i formelen du fant i b) eller ved å regne ut a_4 , a_5 , a_6 og så a_7 ved hjelp av differensligningen $a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}$.

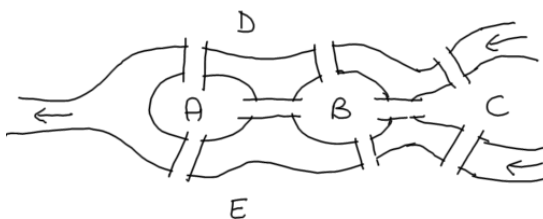
Oppgave 9

La $A = \{a, b, c, d\}$ og la R være relasjonen på A gitt ved flg. relasjonsgraf:



- (2 poeng) Sett opp relasjonen R som en mengde av par (en delmengde av $A \times A$).
- (2 poeng) Sett opp matrisen M_R til R .
- (2 poeng) R er ikke refleksiv. Hvorfor ikke? Hvilke par i tillegg til de du har satt opp under punkt a) må minst være med for at R skal bli refleksiv?
- (2 poeng) R er ikke symmetrisk. Hvorfor ikke? Hvilke par i tillegg til de du har satt opp under punkt a) må minst være med for at R skal bli symmetrisk?
- (2 poeng) R er ikke transitiv. Hvorfor ikke? Hvilke par i tillegg til de du har satt opp under punkt a) må minst være med for at R skal bli transitiv?

Oppgave 10



Tegningen over viser to elver som møtes og renner videre som én elv. I elveløpet er det to øyer og åtte broer som binder områdene sammen. En bro er markert med to parallelle streker. Pilene viser hvilken vei vannet renner.

- (3 poeng) La hvert av øyene/landområdene A, B, C, D og E være punkter i en graf der broene er kanter mellom punktene. Tegn grafen.
- (2 poeng) Sett opp graden til hvert av de fem punktene i grafen.
- (2 poeng) Er det mulig å gjennomføre en spasertur der hver bro passeres nøyaktig én gang? Hvis ja, hvor kan da en slik tur starte og slutte?
- (3 poeng) En ny bro over elven til venstre nedenfor øya A er under bygging. Den vil forbinde områdene D og E. Vil det, når den er ferdig, være mulig å gjennomføre en spasertur der hver bro passeres nøyaktig én gang? Hvis ja, hvor kan da en slik tur starte og slutte?

Definisjoner og formler

Logiske operatorer:

$\neg$ (ikke), $\wedge$ (og), $\vee$ (eller), $\oplus$ (eksklusiv eller), $\rightarrow$ (implikasjon)

Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \quad p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x) \quad \neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

Noen mengdeidentiteter:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Kardinalitet – antallet elementer i en mengde:

Symbolet $|X|$ står for kardinaliteten til mengden X , dvs. antallet forskjellige elementer i X .

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Funksjoner:

I funksjonen $f : A \rightarrow B$ betyr A definisjonsmengde og B verdiorråde. En funksjon $f : A \rightarrow B$ er en-til-en hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon $f : A \rightarrow B$ er på hvis $\forall (b \in B) \exists (a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

Matriser

Den transponerte til en matrise A betegnes med A^T og er den matrisen vi får når radene og kolonnene i A byttes om. Første rad i A blir første kolonne i A^T , andre rad i A blir andre kolonne i A^T , osv. Det betyr spesielt at hvis A er en $m \times n$ -matrise, så blir A^T en $n \times m$ -matrise.

Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen), div og mod:

La a være et heltall og d et positivt heltall. Da finnes entydige heltall q og r med $0 \leq r < d$ slik at $a = dq + r$. Operasjonene **div** og **mod** defineres ved at $a \text{ div } d = q$ og $a \text{ mod } d = r$.

Største felles divisor

Største felles divisor (greatest common divisor – gcd) for to hele tall som ikke begge er 0, er det største heltallet som går opp i begge tallene.

Minste felles multiplum

Minste felles multiplum (least common multiple – lcm) for to positive heltall er det minste positive heltallet som begge går opp i.

Formel gcd(a,b) og lcm(a,b): Hvis gcd(a,b) er største felles divisor for a og b og lcm(a,b) er minste felles multiplum for a og b, så er $ab = \text{gcd}(a,b) \cdot \text{lcm}(a,b)$

Moduloregning:

La m være et positivt heltall. To heltall a og b kalles kongruente *modulo* m hvis m går opp i $a - b$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

- 1) $a \equiv b \pmod{m}$ hvis og bare hvis $a \text{ mod } m = b \text{ mod } m$
- 2) $a \equiv b \pmod{m}$ og $c \equiv d \pmod{m}$, så er $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ og $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Tverrsum

La a være et positivt heltall. Tverrsummen til a er kongruent med a modulo 9.

Summen av rekker:

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^n ar^k = a \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, r \neq 1$

Aritmetisk rekke: La a være første ledd, b siste ledd og d differensen mellom to og to ledd. Antall ledd n er gitt ved $n = \frac{b - a}{d} + 1$ og summen er lik $\frac{(a + b)n}{2}$

Binomialkoeffisienter:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!}, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Antall forskjellige utvalg på r stykker fra en samling på n stykker:

Ordnet uten tilbakelegging: $n(n-1) \cdots (n-r+1)$

Uordnet uten tilbakelegging: $\binom{n}{r}$

Ordnet med tilbakelegging: n^r

Uordnet med tilbakelegging: $\binom{n+r-1}{r}$

Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:

Hvis N objekter skal plasseres i k bokser, må minst

én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

Differensligninger:

Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der c_1 og c_2 er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2.$$

Hvis det karakteristiske polynomet har to forskjellige reelle løsninger r_1 og r_2 , blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomet har kun én løsning r_0 , blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Relasjoner:

En relasjon R på en mengde A er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La R være en relasjon på en mengde A .

R er refleksiv hvis $(a, a) \in R$ for alle $a \in A$.

R er symmetrisk hvis for alle $a, b \in A$ slik at $(a, b) \in R$, så er $(b, a) \in R$.

R er antisymmetrisk hvis for alle $a, b \in A$ slik at $a \neq b$ og $(a, b) \in R$, så er $(b, a) \notin R$.

R er transitiv hvis for alle $a, b, c \in A$ slik at $(a, b) \in R$ og $(b, c) \in R$, så er $(a, c) \in R$.

En partisjon

En samling delmengder $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ av en mengde A utgjør en partisjon av A hvis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = A$ og $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$.

Ekvivalensrelasjoner

En relasjon R på en mengde A er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Ekvivalensklasser

Hvis R er en ekvivalensrelasjon på en mengde A og $a \in A$, så er ekvivalensklassen $[a]$ til a definert ved $[a] = \{b \in A \mid (a, b) \in R\}$. Eller med ord: $[a]$ er lik mengden av de $b \in A$ som er relatert til a . Ekvivalensklassene til en relasjon utgjør en partisjon av A .

Delvis- eller partiell ordning

En relasjon R på en mengde A er en delvis ordning hvis den er *refleksiv*, *antisymmetrisk* og *transitiv*. Hvis dette er oppfylt, sier vi at A er en delvis ordnet mengde (med hensyn på R). Et element $a \in A$ er et *maksimalt* element hvis det ikke finnes noen $b \in A$ ($b \neq a$) slik at $(a, b) \in R$. Det betyr at det er ikke noe element som kommer «etter» a i ordningen. Tilsvarende er et element $a \in A$ et *minimalt* element hvis det ikke finnes noen $b \in A$ ($b \neq a$) slik at $(b, a) \in R$.

Grafteori:

Graden til et punkt. La a være et punkt (eng: vertex) i en urettet graf. Graden $grad(a)$ til a er antallet kanter knyttet til punktet.

Grad-kant-setningen:

La G være en urettet graf med endelig mange kanter. Da vil summen av gradene til punktene i G være dobbelt så stor som antallet kanter.

Euler-veier:

En **lukket** Euler-vei (en Euler-sykel) i en urettet graf er en vei som starter og slutter i **samme punkt** og som passerer hver kant en og bare en gang.

En **åpen** Euler-vei i en urettet graf er en vei som starter og slutter i **to forskjellige** punkter og som passerer hver kant en og bare en gang.

Eulers setning:

En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en lukket Euler-vei (en Euler-sykel) hvis og bare hvis alle punktene i grafen har partallsgrad.

En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en åpen (ikke-lukket) Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to punkter i grafen har oddetallsgrad.