Eksamen i Diskret matematikk mandag 17. februar 2014

Løsningsforslag

Oppgave 1

a)

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q \vee r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$
S	S	S	U	U	S	S	S
S	S	U	U	U	U	U	U
S	U	S	U	S	S	S	S
S	U	U	U	S	S	S	S
U	S	S	S	U	S	S	S
U	S	U	S	U	S	U	S
U	U	S	S	S	S	S	S
U	U	U	S	S	S	S	S

Utsagnene $\neg p \vee \neg q \vee r$ og $p \to (q \to r)$ er ekvivalente siden de tilhørende kolonnene er like.

Dette kan også vises mer direkte:

1) $\neg p \vee \neg q \vee r$ er usann kun når $\neg p = U$, $\neg q = U$ og $r = U$, dvs. kun når $p = S$, $q = S$ og $r = U$.

2) $p \to (q \to r)$ er usann kun når $p = S$ og $q \to r$ er usann. Men $q \to r$ er usann kun når $q = S$ og $r = U$. Dermed er $p \to (q \to r)$ usann kun når $p = S$, $q = S$ og $r = U$.

b)

i) $p \vee q$

ii) $p \wedge q$

iii) $p \wedge \neg q$

iv) $p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$

v) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

c)

i) $\forall x\, P(x, \text{Kari})$

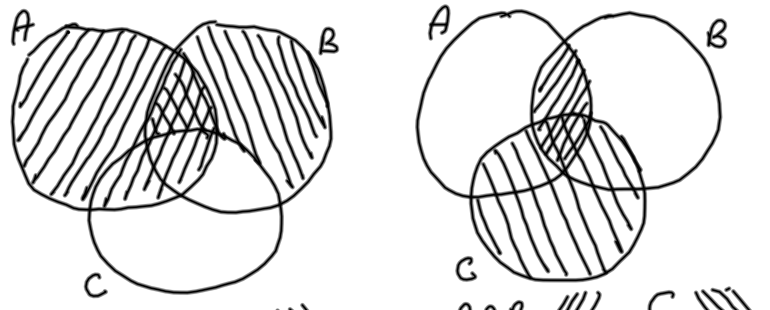
ii) $\neg \exists x\, P(x, \text{Per}) \equiv \forall x\, \neg P(x, \text{Per})$

iii) $\forall x \exists y\, P(x,y)$

iv) $\neg \exists x \forall y\, P(x,y) \equiv \forall x \exists y\, \neg P(x,y)$

Oppgave 2

a)



A //// $B-C$ \\\\

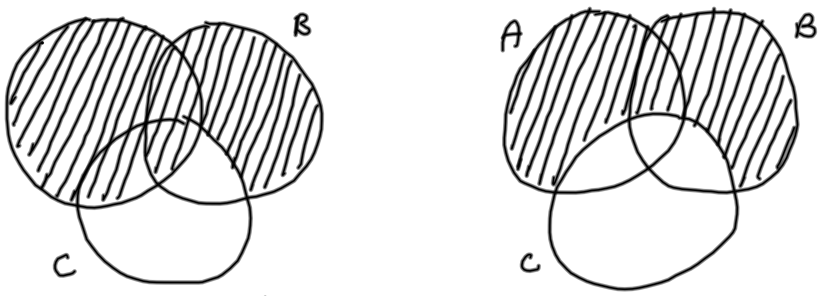
$A \cap (B-C)$ ####

$A \cap B$ //// C \\\\

$(A \cap B) - C$ ////

De er like

b)

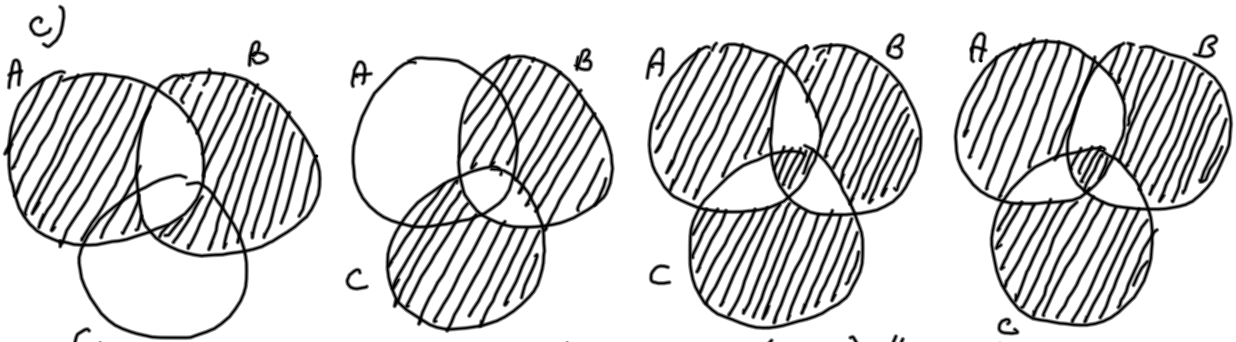


$A \cup (B-C)$ ////

$(A \cup B) - C$

De er <u>ikke</u> like

c)



$A \oplus B$ ////

$B \oplus C$ ////

$A \oplus (B \oplus C)$ ////

$(A \oplus B) \oplus C$ ////

De er like.

Oppgave 3

a) A er en 2×3-matrise

b) $A + A = 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

c) $B = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, B er en 3×2-matrise

d) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, AB er en 2×2-matrise

e) $BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, BA er en 3×3-matrise

Oppgave 4

a)

$$\begin{array}{r|l} 461 & 2 \\ \hline 230 & 1 \\ 115 & 0 \\ 57 & 1 \\ 28 & 1 \\ 14 & 0 \\ 7 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}$$

$461_{10} = \overbrace{111}^{7}\,\overbrace{001}^{1}\,\overbrace{101}^{5}{}_2 = 715_8$

b) $FFF_{16} = \overbrace{111}^{7}\,\overbrace{111}^{7}\,\overbrace{111}^{7}\,\overbrace{111}^{7}{}_2 = 7777_8$

$= 16^3 - 1 = 4095_{10}$

c)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 123 & 61 & 30 & 15 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} 123_{10} & = & 01111011_2 \\ \hline \text{komp.} & = & 10000100 \\ +1 & & 1 \\ \hline -123_{10} & = & 10000101_2 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{lcl} a & = & 11111111_2 \\ \hline \text{komp.} & = & 00000000 \\ +1 & = & 1 \\ \hline -a & = & 00000001 \end{array} = 1$$

Dvs. $a = 11111111_2 = -1_{10}$

Oppgave 5

a) Antall ledd $= \frac{206-10}{7} + 1 = 29$. Sum $= \frac{(10+206)\cdot 29}{2} = 3132$

b) $\text{Sum} = \sum_{k=0}^{10} (-2)^k = \frac{(-2)^{11}-1}{-2-1} = \frac{-2049}{-3} = 683$

c) $770 = 2 \cdot 5 \cdot \underline{7} \cdot 11$, $567 = 3^4 \cdot \underline{7}$, 7 er største felles divisor

d)

a	b	r
770	567	203
567	203	161
203	161	42
161	42	35
42	35	7
35	7	0

Euklids algoritme gir også at 7 er største felles divisor for 770 og 567.

e) 1) $n^3 - n = n(n^2-1) = (n-1)n(n+1)$. Både 2 og 3 vil gå opp i $(n-1)n(n+1)$ siden dette er tre tall i rekkefølge. Vi vet at 2 går opp i hvert andre tall og 3 i hvert tredje tall i heltallsrekkefølgen. Dermed vil $2 \cdot 3 = 6$ gå opp i $n^3 - n$ for alle $n \geq 0$.

2) <u>Induksjonsbevis</u>

i) <u>Basistrinnet</u> 6 går opp i $0^3 - 0 = 0$.

ii) <u>Induksjonstrinnet</u> Anta at 6 går opp i $k^3 - k$ for en $k \geq 0$. Vi har $(k+1)^3 - (k+1)$
$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 - k + 3k^2 + 3k$
$= k^3 - k + 3k(k+1)$. Induksjonshypotesen gir at 6 går opp i $k^3 - k$. Videre vil 2 gå opp i $k(k+1)$ og dermed 6 i $3k(k+1)$. Vi får derfor at 6 går opp i $(k+1)^3 - (k+1)$.

Induksjonsprinsippet gir at 6 går opp i $n^3 - n$ for alle $n \geq 0$.

Oppgave 6

a) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6480$

b) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 600$

c) Ta f.eks. de som har 1 som første siffer. Av dem er det
$\binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5 + \binom{4}{3} \cdot 5 + \binom{4}{4} = 171$ som har minst tre 1-ere.

Det er $5\left(\binom{4}{3} \cdot 5 + \binom{4}{4}\right) = 5 \cdot 21 = 105$ av dem som har minst tre like av 0, 2, 3, 4 eller 5.

Det blir det samme for de som har 2, 3, 4 eller 5 som første siffer. Dermed blir svaret

$$5(171 + 105) = 5 \cdot 276 = 1380$$

d)

$2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \equiv a_6 \pmod 7$,

dvs. $31 \equiv a_6 \pmod 7$. Da må $a_6 = 3$.

La $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ og $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$ være to medlemsnummer. Hvis de skiller seg på kun én av de fem første plassene, f.eks. plass k, må $k(a_k - b_k) \equiv 0 \pmod 7$. Men $a_k - b_k$ kan kun ha verdiene $-5, -4, \ldots, 3, 4, 5$ og k kan kun ha verdiene 1, 2, 3, 4 eller 5. Derfor kan ikke 7 gå opp i $k(a_k - b_k)$.

Oppgave 7

a) $a_2 = 2a_1 + 3a_0 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10$

$a_3 = 2a_2 + 3a_1 = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 2 = 26$

b) Karakteristisk polynom: $r^2 - 2r - 3$

$r^2 - 2r - 3 = 0$, $r = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$, $r_1 = 3$, $r_2 = -1$.

Generell løsning: $a_n = \alpha 3^n + \beta(-1)^n$.

Vi finner α og β ved hjelp av:

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= a_0 = 2 \\ 3\alpha - \beta &= a_1 = 2 \end{aligned}\right\} \quad 4\alpha = 4, \ \alpha = 1, \ \beta = 1.$$

Løsning: $a_n = 3^n + (-1)^n$.

Sjekk: $a_2 = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$ ok!

$a_3 = 3^3 - 1 = 27 - 1 = 26$ ok!

c) $a_8 = 3^8 + (-1)^8 = 3^8 + 1 = 6561 + 1 = 6562$

Oppgave 8

a) $f(2) = 2 \bmod 3 + 2 \bmod 5 = 2 + 2 = 4$.

$f(6) = 6 \bmod 3 + 6 \bmod 5 = 0 + 1 = 1$

$f(14) = 14 \bmod 3 + 14 \bmod 5 = 2 + 4 = 6$

b) Vi får f.eks. $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(3) = 3$ og $f(4) = 5$.

Vi kan ikke ha $f(a) < 0$ eller $f(a) > 6$ siden

$0 \le a \bmod 3 \le 2$ og $0 \le a \bmod 5 \le 4$.

Dermed: $V_f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

c) f er ikke en-til-en siden f.eks. $f(0) = f(15) = 0$.

d) $f: A \to B$ er ikke på siden $V_f = \{0, \dots, 6\}$ og $B = \{0, \dots, 10\}$.

e) Vi har at $f(a) = 0$ hvis og bare hvis $a \bmod 3 = 0$ og $a \bmod 5 = 0$. Det betyr at $f(a) = 0$ hvis og bare hvis $3 \cdot 5 = 15$ går opp i a. Det er tallene $0, 15, 30, 45, \dots$

$$\{a \in A \mid f(a) = 0\} = \{15k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

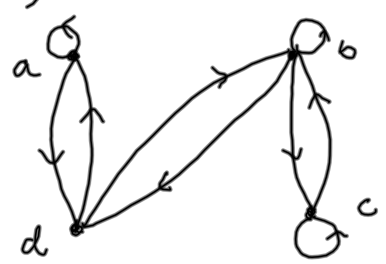
Vi ser at $a \bmod 3 + a \bmod 5 = 6$ hvis og bare hvis $(a+1) \bmod 3 + (a+1) \bmod 5 = 0$. Dermed

$$\{a \in A \mid f(a) = 6\} = \{15k - 1 \mid k = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Oppgave 9

a) $R = \{(a,a), (a,d), (b,b), (b,c), (b,d), (c,b), (c,c), (d,a), (d,b)\}$.

b)



c) i) R er ikke refleksiv siden (d,d) mangler.

ii) R er symmetrisk siden matrisen M_R er en symmetrisk matrise.

iii) R er ikke antisymmetrisk siden f.eks. både (a,d) og (d,a) er i R.

v) R er ikke transitiv siden f.eks. $(a,d) \in R$ og $(d,b) \in R$, men $(a,b) \notin R$.

d)

$$M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1&0&0&1 \\ 0&1&1&1 \\ 0&1&1&0 \\ 1&1&0&0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1&0&0&1 \\ 0&1&1&1 \\ 0&1&1&0 \\ 1&1&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&0&1 \\ 1&1&1&1 \\ 0&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

Dermed er det kun fra a til c og fra c til a at det ikke går en vei med lengde 2.

Oppgave 10

a) grad(A) = 2, grad(B) = 4, grad(C) = 4, grad(D) = 4, grad(E) = 4, grad(F) = 4, grad(G) = 2.

b) Det finnes ingen åpen Euler-vei siden det ikke er slik at nøyaktig to punkter har oddetallsgrad og resten partallsgrad.

c) Svaret er ja siden alle punktene har partallsgrad.

F.eks. er dette en vei: A–B–F–G–E–C–D–F–E–D–B–C–A.

d) Hvis G fjernes, vil E og F få oddetallsgrad, mens resten har partallsgrad. Da vil det finnes en åpen Euler-vei.