HØGSKOLEN I OSLO
OG AKERSHUS

Fakultet for teknologi, kunst og design
Teknologiske fag

Eksamen i: Diskret matematikk

Målform: Bokmål

Dato: **17.02.2014**

Tid: 5 timer / kl. 9 - 14

Antall sider (inkl. forside): 9

Antall oppgaver: 10

Tillatte hjelpemidler: Håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig.
Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Besvarelsen skal merkes med kandidatnummer, ikke navn.
Bruk blå eller sort kulepenn på innføringsarket.

Faglig veileder: Ulf Uttersrud

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Instituttleders/ Programkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Instituttleder/ Programkoordinator	
Ulf Uttersrud		Roy Istad		

Emnekode: DAPE1300 – ITPE1300

Alle de 10 oppgavene teller likt. I oppgaver med underpunkter vil krevende og mer omfattende underpunkter kunne telle mer enn lette og enkle underpunkter. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave. **Alle svar skal begrunnes!** Det kan for eksempel skje ved at du tar med mellomregninger eller gir andre former for argumentasjon. **Kun et svar uten noen begrunnelse er normalt verdiløst.**

Oppgave 1

a) La p, q og r være logiske utsagn. Avgjør om de to sammensatte utsagnene $p \to (q \to r)$ og $\neg p \vee \neg q \vee r$ er ekvivalente.

b) La p og q være logiske utsagn. Erstatt ordene i flg. utsagn med en eller flere logiske operatorer slik at det blir ekvivalente utsagn:

i) p eller q
ii) både p og q
iii) p, men ikke q
iv) p eller q, men ikke begge
v) verken p eller q

c) La utsagnsfunksjonen $P(x, y)$ være definert ved setningen «x elsker y». Skriv flg. utsagn ved hjelp P, logiske operatorer og kvantorer:

i) Alle elsker Kari
ii) Ingen elsker Per
iii) Alle elsker noen
iv) Ingen elsker alle

Oppgave 2

La A, B og C være vilkårlige mengder.

a) Lag Venn-diagram og avgjør om mengdene $A \cap (B - C)$ og $(A \cap B) - C$ er like.

b) Lag Venn-diagram og avgjør om mengdene $A \cup (B - C)$ og $(A \cup B) - C$ er like.

c) Lag Venn-diagram og avgjør om mengdene $A \oplus (B \oplus C)$ og $(A \oplus B) \oplus C$ er like. Operatoren $\oplus$ står for *eksklusiv union* (eller *symmetrisk differens*), dvs. $X \oplus Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.

Oppgave 3

La tallmatrisen A være gitt ved:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Hva er dimensjonen til A ?

b) Finn matrisen $A + A$.

c) Finn matrisen $B = A^T$ der A^T er den transponerte (eng: transpose) matrisen til A. Hva er dimensjonen til B ?

d) Finn matriseproduktet AB der $B = A^T$. Hva er dimensjonen til AB ?

e) Finn matriseproduktet BA der $B = A^T$. Hva er dimensjonen til BA ?

Oppgave 4

a) Sett opp desimaltallet 461 på binær og på oktal form.

b) Tallet FFF_{16} er gitt på heksadesimal form. Finn det på desimal og på oktal form.

I resten av oppgaven skal vi bruke fast bitformat på 8 biter, to-komplement og fortegnsbit for representasjon av heltall på binærform.

c) Hvordan representeres -123_{10} i dette formatet?

d) Tallet 11111111 er gitt med dette formatet. Hva er tallet på desimal form?

Oppgave 5

a) Finn summen 10 + 17 + 24 + 31 + · · · · · + 199 + 206.

b) Finn summen 1 – 2 + 4 – 8 + 16 – 32 + · · · · · – 512 + 1024.

c) Finn største felles divisor for 770 og 567 ved hjelp av primtallsfaktorisering.

d) Finn største felles divisor for 770 og 567 ved hjelp av Euklids algoritme.

e) Vis ved hjelp av induksjon eller på annen måte, at 6 går opp i $n^3 - n$ for alle $n \geq 0$.

Oppgave 6

En forening skal bruke et heltall med 5 siffer som medlemsnummer. Det er kun 0, 1, 2, 3, 4 og 5 som kan brukes som siffer og 0 kan ikke stå først. F.eks. er 12345 og 50403 lovlige som medlemsnummer, mens 01234 og 65432 er ulovlige.

a) Hvor mange lovlige medlemsnummer er det?
b) Hvor mange av de lovlige medlemsnumrene har bare forskjellige siffer?
c) Hvor mange av de lovlige medlemsnumrene har minst tre like siffer?
d) For å unngå feilskriving av medlemsnummer skal det innføres et ekstra kontrollsiffer. La a_1, a_2, a_3, a_4 og a_5 være de fem sifrene fra venstre mot høyre i et medlemsnummer. Da skal kontrollsifferet (det 6. sifferet) a_6 være det sifferet (0 – 6) som oppfyller flg. kongruens:

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 \equiv a_6 \pmod 7$$

Hva blir kontrollsifferet som må legges til medlemsnummeret 20512? Vis generelt at hvis nøyaktig ett av de fem første sifrene i et medlemsnummer er feilskrevet, vil det kunne avsløres ved hjelp av kontrollsifferet.

Oppgave 7

Gitt differensligningen $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 2$.

a) Finn a_2 og a_3.
b) Finn en formel for a_n. Sjekk at formelen din stemmer ved å sette inn $n = 2$ og 3. Da skal du få de samme resultatene som i punkt a).
c) Finn a_8 ved for eksempel å sette inn i formelen du fant i punkt b) eller ved å fortsette som i punkt a), dvs. ved å regne ut a_4, a_5, osv. til du kommer til a_8.

Oppgave 8

La A og B være mengdene gitt ved $A = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ og $B = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 10\}$. Definer funksjonen $f : A \to B$ ved at for hvert heltall $a \in A$ skal

$$f(a) = a \bmod 3 + a \bmod 5.$$

a) Finn $f(a)$ for $a = 2$, 6 og 14.
b) Finn verdimengden V_f til f.
c) Er f en til en?
d) Er f på?
e) Finn mengdene $\{a \in A \mid f(a) = 0\}$ og $\{a \in A \mid f(a) = 6\}$.

Oppgave 9

Matrisen M_R nedenfor er matrisen til en relasjon R på mengden $A = \{a, b, c, d\}$.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Sett opp R som en mengde av par av elementer fra A.

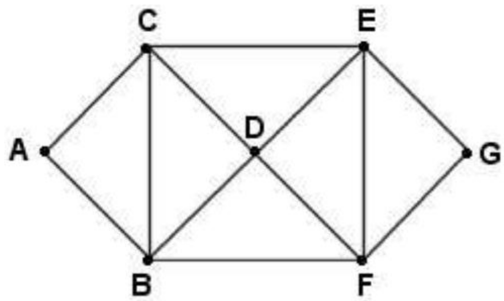
b) Tegn grafen G_R til R.

c) Er R refleksiv? Er R symmetrisk? Er R antisymmetrisk? Er R transitiv?

d) Sett opp de parene (x, y) av elementer fra A som er slik at det i grafen G_R **ikke** går en vei med lengde 2 fra det første elementet til det andre.

Oppgave 10

Gitt følgende graf:



a) Sett opp graden til hvert punkt i grafen.

b) Finnes det en åpen Euler-vei i grafen? Hvis ja, sett opp en slik vei.

c) Finnes det en lukket Euler-vei i grafen? Hvis ja, sett opp en slik vei.

d) Vi fjerner punktet G og de to kantene som hører til G. Finnes det da en åpen eller lukket Euler-vei i grafen?

HØGSKOLEN I OSLO OG AKERSHUS

Definisjoner og formler

Logiske operatorer:

$\neg$ (ikke), $\wedge$ (og), $\vee$ (eller), $\oplus$ (eksklusiv eller), $\to$ (implikasjon)

Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $\quad$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\quad$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$p \to q \equiv \neg p \vee q$ $\quad$ $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$ $\quad$ $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

Mengdeoperatorer:

$\cap$ (snitt), $\cup$ (union), $\oplus$ (eksklusiv union), $\overline{}$ (komplement)

Noen mengdeidentiteter:

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\quad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Kardinalitet – antallet elementer i en union:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Funksjoner:

I funksjonen $f : A \to B$ betyr A definisjonsmengde og B verdiområde. En funksjon $f : A \to B$ er en-til-en hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon $f : A \to B$ er på hvis $\forall (b \in B)\ \exists (a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

Matriser

La A være en $m \times n$-matrise. Den transponerte til A betegnes med A^T og er den $n \times m$-matrisen vi får når radene og kolonnene i A byttes om.

Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen), div og mod:

La a være et heltall og d et positivt heltall. Da finnes entydige heltall q og r med $0 \le r < d$ slik at $a = dq + r$. Operasjonene **div** og **mod** defineres ved at a div $d = q$ og $a \bmod d = r$. Her kalles r for *resten* og q for *kvotienten*.

Moduloregning:

La m være et positivt heltall. To heltall a og b kalles kongruente *modulo* m hvis m går opp i $a - b$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

Summen av rekker:

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^{n} a r^k = a \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$, $r \ne 1$

Aritmetisk rekke: La a være første ledd, b siste ledd og d differensen mellom to og to ledd. Antall ledd n er gitt ved $n = \dfrac{b-a}{d} + 1$ og summen er lik $\dfrac{(a+b)n}{2}$

Binomialkoeffisienter:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}, \qquad \binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \qquad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Antall forskjellige utvalg på r stykker fra en samling på n stykker:

Ordnet uten tilbakelegging:	$n(n-1)\cdots(n-r+1)$
Uordnet uten tilbakelegging:	$\binom{n}{r}$
Ordnet med tilbakelegging:	n^r
Uordnet med tilbakelegging:	$\binom{n+r-1}{r}$

HØGSKOLEN I OSLO OG AKERSHUS

Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:

Hvis N objekter skal plasseres i k bokser, må minst én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

Differensligninger:

Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der c_1 og c_2 er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2 .$$

Hvis det karakteristiske polynomet har to forskjellige reelle løsninger r_1 og r_2, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomet har kun én løsning r_0, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Relasjoner:

En relasjon R på en mengde A er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La R være en relasjon på en mengde A.

R er refleksiv hvis $(a,a) \in R$ for alle $a \in A$.

R er symmetrisk hvis $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \in R$.

R er antisymmetrisk hvis $a \neq b$ og $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \notin R$.

R er transitiv hvis $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$, så er $(a,c) \in R$.

HØGSKOLEN I OSLO
OG AKERSHUS

En partisjon

En samling delmengder $A_1,\ A_2,\ A_3,\ .\ .\ .\ .\ ,\ A_n$ av en mengde A utgjør en partisjon av A hvis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup\ .\ .\ .\ \cup A_n = A$ og $A_i \cap A_j = Ø$ for alle $i \neq j$.

Ekvivalensrelasjoner

En relasjon R på en mengde A er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Ekvivalensklasser

Hvis R er en ekvivalensrelasjon på en mengde A og $a \in A$, så er ekvivalensklassen $[a]$ til a definert ved $[a] = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$. Eller med ord: $[a]$ er lik mengden av de $b \in A$ som er relatert til a. Ekvivalensklassene til en relasjon utgjør en partisjon av A.

Delvis- eller partiell ordning

En relasjon R er en delvis ordning hvis den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

Grafteori:

Graden til et punkt. La a være et punkt (eng: vertex) i en urettet graf. Graden $grad(a)$ til a er antallet kanter knyttet til punktet.

Grad-kant-setningen:

La G være en urettet graf med endelig mange kanter. Da vil summen av gradene til punktene i G være dobbelt så stor som antallet kanter.

Eulers setning:

En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en lukket Euler-vei (en Euler-sykel) hvis og bare hvis alle punktene i grafen har partallsgrad.

En sammenhengende urettet graf har en åpen (ikke-lukket) Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to punkter i grafen har oddetallsgrad.