Diskret matematikk – eksamen 26. februar 2013

Løsningsforslag

Oppgave 1

a)

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \wedge p$
S	S	U	S	S
S	U	U	U	U
U	S	S	S	U
U	U	S	S	U

b) Operatoren $*$ er definert slik i oppgaveteksten

p	q	$p*q$
S	S	S
S	U	U
U	S	U
U	U	S

Her skal vi finne et sammensatt utsagn ved hjelp av p, q og en eller flere av operatorene $\neg, \wedge, \vee, \oplus$ slik at utsagnet blir ekvivalent med $p*q$.
OBS: Her er det ikke nok å sette opp et utsagn. Det må i tillegg begrunnes hvorfor det er ekvivalent med $p*q$.

1) Vi ser at $p*q$ er sann hvis p og q har like verdier og usann hvis de har ulike verder. Det er nøyaktig det motsatte av hvordan operatoren $\oplus$ virker:

p	q	$p \oplus q$
S	S	U
S	U	S
U	S	S
U	U	U

Dermed får vi $\quad p*q \equiv \neg(p \oplus q)$

2) Vi vet at $p \wedge q$ er sann kun når både p og q er sanne. Det betyr igjen at $\neg p \wedge \neg q$ er sann kun når både p og q er usanne. Dermed får vi:

$$p*q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

3) Det er enda flere muligheter (som alle er ekvivalente), men de tas ikke med her.

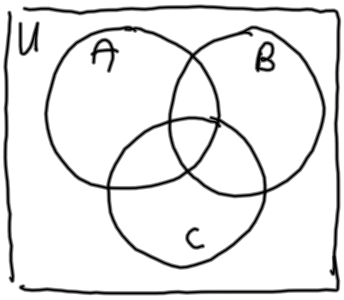
c)

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \to r$	$p \to (q \to r)$
S	S	S	S	S	S	S
S	S	U	S	U	U	U
S	U	S	U	S	S	S
S	U	U	U	S	S	S
U	S	S	S	S	S	S
U	S	U	S	U	U	S
U	U	S	S	S	S	S
U	U	U	S	S	U	S

De to siste kolonnene er ulike. Dermed er $(p \to q) \to r$ og $p \to (q \to r)$ ikke ekvivalente.

Oppgave 2

a)

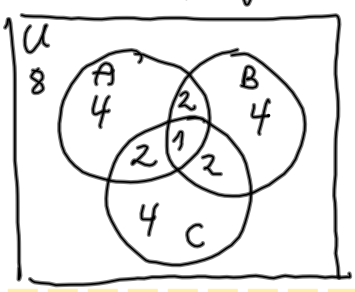


b) U er alle ord. Dermed $|U| = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.
A er de ordene der a står først: $|A| = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$.
På samme måte får vi $|B| = 3 \cdot 1 \cdot 3 = 9$ og $|C| = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$.

$A \cap B$ er de ordene der a står på de to første plassene.
Dermed $|A \cap B| = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$. Tilsvarende får vi
$|A \cap C| = 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$ og $|B \cap C| = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$.

Det er kun ett ord der a står på alle plassene, dvs. ordet aaa. Dermed $|A \cap B \cap C| = 1$.

Vi kan sette disse opplysningene i et Venn-diagram:



c) Her må vi ha b eller c på alle plassene.
Svaret blir dermed $2\cdot 2\cdot 2 = 8$. Dette kunne vi også ha funnet i Venn-diagrammet på forrige side.

d) Dette er alle minus de der a ikke inngår.
Svaret blir $27 - 8 = 19$.

e) $|(A-(B\cup C)) \cup (B-(A\cup C)) \cup (C-(A\cup B))|$
$= 4+4+4 = 12.$

Oppgave 3

a) A er en 2×3-matrise og B en 3×2-matrise

b) AB vil bli en 2×2-matrise.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4-1 & 3+0+2 \\ 2+0+1 & 6+0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

c) BA vil bli en 3×3-matrise.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

a)

246	123	61	30	15	7	3	1	0
2	0	1	1	0	1	1	1	1

$$246_{10} = \underbrace{1111}_{F}\,\underbrace{0110}_{6}{}_2 = F6_{16}$$

b)
$$7777_8 = 111\ 111\ 111\ 111_2 = \underbrace{1111}_{F}\ \underbrace{1111}_{F}\ \underbrace{1111}_{F}{}_2 = FFF_{16}$$

$$7777_8 = 7\cdot 8^3 + 7\cdot 8^2 + 7\cdot 8 + 7 = \sum_{k=0}^{3} 7\cdot 8^k = 7\,\frac{8^4-1}{8-1} = 8^4 - 1 = 4095$$

c) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$
$= 2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

Et tall på heksadesimal form har like mange 0-er bakerst som $16 = 2^4$ går opp i tallet. Primtallsfaktoriseringen sier at 16 går opp to ganger. Forøvrig har vi at $10! = 375F00_{16}$, men dette spørres det ikke etter i oppgaven.

d) $\sum_{k=0}^{3} 7 \cdot 8^k = 7 \frac{8^4 - 1}{8 - 1} = 4095$

Oppgave 5

a) Det finnes $2^8 = 256$ forskjellige bitsekvenser med 8 biter. Dermed kan 256 forskjellige heltall representeres på denne måten.
Det største (positive) tallet er gitt som $01111111_2 = 127_{10}$

b) Det er $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$ bitsekvenser der 1 står først. Dermed $2^7 = 128$ negative tall. Det minste (største negative) har binærformen 10000000_2 og står for tallet -128.

c) Det må være fire 0-er og fire 1-ere. Vi kan velge fire 0-er på $\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$ måter.
Hvis tallet skal være negativt, må det være 1 først. Dermed $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$ som er negative.

d) Første bit må være 0. Deretter kan vi ha 7, 6 eller 5 1-biter. Dermed $\binom{7}{7} + \binom{7}{6} + \binom{7}{5} = \binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2}$
$= 1 + 7 + 21 = 29$ mulige tall.

Oppgave 6

a) $\binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 3\cdot 4\cdot 7 = 84$

b) I KULTURUKE fordeler bokstavene seg slik:

Bokstav	U	K	L	T	R	S
Antall	3	2	1	1	1	1

Antallet omstokkinger blir derfor:

$$\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{9!}{3!\cdot 2!} = 30240$$

c) $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$

d) Med 5 på midten kan de øvrige permuteres på $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ måter.

Oppgave 7

a) $a_2 = 4a_1 - 4a_0 = 4(a_1 - a_0) = 4\cdot 5 = 20$

$a_3 = 4(a_2 - a_1) = 4(20-8) = 4\cdot 12 = 48$

b) Karakteristisk polynom: $r^2 = 4r - 4$, $r^2 - 4r + 4 = 0$.

Løsning: $r = \frac{4 \pm \sqrt{16-4\cdot 4}}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Kun én løsning: $r_0 = 2$

Generell løsning av differensligningen: $a_n = \alpha 2^n + \beta n 2^n$.

$a_0 = \alpha 2^0 + \beta\cdot 0\cdot 2^0 = \alpha = 3$

$a_1 = \alpha\cdot 2^1 + \beta\cdot 1\cdot 2^1 = 2\alpha + 2\beta = 8$, $\beta = 1$.

Løsning: $a_n = 3\cdot 2^n + n\cdot 2^n = (3+n)2^n$

Test: $a_2 = (3+2)2^2 = 5\cdot 4 = 20$, $a_3 = (3+3)\cdot 2^3 = 6\cdot 8 = 48$

c) $a_8 = (3+8)2^8 = 11\cdot 256 = 2816$.

Oppgave 8

a) A består av tallene fra 11 til 30, dvs. $|A| = 30 - 11 + 1 = 20$

B består av tallene fra 0 til 18, dvs. $|B| = 18 - 0 + 1 = 19$

b) Primtallene i B: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17

c) $f(30) = 3 \cdot 0 = 0$

$f(11) = 1,\ f(12) = 2,\ \ldots\ldots,\ f(19) = 9$

$f(25) = 10,\ f(26) = 12,\ f(27) = 14,\ f(28) = 16,\ f(29) = 18.$

Tallene 11, 13, 15 og 17 er ikke med i V_f.

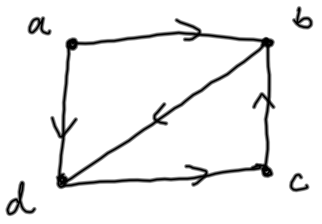
$V_f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18\}$

d) f er ikke en-til-en siden f.eks. $f(12) = f(21) = 2$

e) f er ikke på siden $V_f \neq B$.

Oppgave 9

a) Grafen G_R til R:



b) Matrisen M_R til R:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) R er ikke refleksiv siden f.eks. (a,a) mangler

R er ikke symmetrisk siden f.eks. $(a,b) \in R$, mens $(b,a) \notin R$.

R er antisymmetrisk. Det finnes ingen piler begge veier mellom to forskjellige punkter

R er ikke transitiv siden f.eks. $(d,c) \in R$ og $(c,b) \in R$, mens $(d,b) \notin R$.

d) $M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) Dette kan vi finne ved å studere grafen G_R eller eventuelt finne $M_R^{[3]}$.

$M_R^{[3]} = M_R^{[2]} \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Flg. par skal være med:

(a, b) — a, d, c, b
(a, c) — a, b, d, c
(b, b) — b, d, c, b
(c, c) — c, b, d, c
(d, d) — d, c, b, d

Oppgave 10

a) grad(A) = 2, grad(B) = 4, grad(C) = 4
grad(D) = 2, grad(E) = 4, grad(F) = 2

b) Ja, det finnes en lukket Euler-vei siden alle punktene har partallsgrad (Eulers setning). Vi kan f.eks. velge flg. vei A – B – C – E – B – D – E – F – C – A

c) Uansett hvilken kant vi tar vekk vil nøyaktig to punkter få oddetallsgrad. Da sier Eulers setning at det finnes en åpen Euler-vei, men ingen lukket Euler-vei.

d) Vi skal nå fjerne to kanter. Vi kan ikke fjerne begge kantene som hører til A siden A da blir isolert. Tilsvarende for D og F.

1) Det er umulig siden vi uansett vil få minst ett punkt med oddetallsgrad.
2) Fjerner vi kantene A-B og B-D, får vi en åpen Euler-vei.
3) Fjerner vi kantene A-B og E-F, får vi ingen av delene.