

Fakultet for teknologi, kunst og design

Teknologiske fag

Eksamen i: Diskret matematikk

Målform: Bokmål

Dato: 26 .02.2013

Tid: 5 timer / kl. 9 - 14

Antall sider (inkl. forside): 9

Antall oppgaver: 10

Tillatte hjelpemidler: Håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig.
Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Besvarelsen skal merkes med kandidatnummer, ikke navn.
Bruk blå eller sort kulepenn på innføringsarket.

Faglig veileder: Ulf Uttersrud

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Instituttleders/ Programkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Instituttleder/ Programkoordinator	
Ulf Uttersrud				

Emnekode: DAPE1300 – ITPE1300 – FO019A – FO019I

Alle de 10 oppgavene teller likt. I oppgaver med underpunkter vil krevende og mer omfattende underpunkter kunne telle mer enn lette og enkle underpunkter. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave. **Alle svar skal begrunnes!** Det kan for eksempel skje ved at du tar med mellomregninger eller gir andre former for argumentasjon. **Kun et svar uten noen begrunnelse er normalt verdiløst.**

Oppgave 1

- a) La p og q være logiske utsagn. Sett opp en sannhetsverditabell for det sammensatte utsagnet $(\neg p \vee q) \wedge p$.
- b) La S stå for *sann* og U for *usann*. En logisk operator $*$ er definert ved at $S * S = S$, $S * U = U$, $U * S = U$ og $U * U = S$. Lag et sammensatt utsagn ved hjelp av p , q og en eller flere av operatorene $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$ slik at utsagnet blir ekvivalent med $p * q$. (Obs: operatoren $\oplus$ står for *eksklusiv eller*).
- c) La p , q og r være logiske utsagn. Avgjør om de to sammensatte utsagnene $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ og $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ er ekvivalente eller ikke.

Oppgave 2

Vi kaller et «ord» på tre bokstaver som kun inneholder bokstavene a , b eller c , for et abc -ord. F.eks. er bca , aaa og cbc alle abc -ord. La U være mengden av alle abc -ordene, A mengden av de abc -ordene som har en a først, B mengden av de som har en a på midten og C mengden av de som har en a til slutt.

- a) Tegn et Venn-diagram for U og de tre mengdene A , B og C .
- b) Finn antallet elementer i U , A , B , C , $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$ og $A \cap B \cap C$.
- c) Hvor mange abc -ord er det hvor a ikke inngår?
- d) Hvor mange abc -ord er det hvor a inngår minst én gang?
- e) Hvor mange abc -ord er det hvor a inngår nøyaktig én gang?

Oppgave 3

La tallmatrisene A og B være gitt ved:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- a) Hva er dimensjonene til A og B ?
- b) Finn matriseproduktet AB . Hvilken dimensjon får det?
- c) Finn matriseproduktet BA . Hvilken dimensjon får det?

Oppgave 4

- a) Sett opp desimaltallet 246 på binær og på heksadesimal form.
- b) Tallet 7777_8 er gitt på oktal form. Finn det på desimal og på heksadesimal form.
- c) Finn primtallsfaktoriseringen til $10!$ (dvs. 10 fakultet). Hvor mange 0-er vil det bli bakerst hvis $10!$ skrives på heksadesimal form?
- d) Finn summen $\sum_{k=0}^3 7 \cdot 8^k$ ved hjelp av formelen for summen av en geometrisk rekke.

Oppgave 5

I denne oppgaven skal det brukes et fast bitformat på 8 biter, to-komplement og fortegnsbiter for representasjon av heltall på binærform. For eksempel skal tallet 0 representeres som 00000000.

- a) Hvor mange forskjellige heltall kan representeres på denne formen? Hva er det største tallet? Oppgi det både på desimalform og på binærform.
- b) Et heltall på denne formen er negativt hvis og bare hvis den første biten er 1. Hvor mange negative heltall kan representeres på denne formen? Hva er det minste (dvs. det størst negative)? Oppgi det både på desimalform og på binærform.
- c) Hvor mange forskjellige heltall representert på denne formen har like mange 0-biter som 1-biter? Hvor mange av dem er negative?
- d) Hvor mange positive heltall (tall større enn 0) representert på denne formen har flere 1-biter enn 0-biter?

Oppgave 6

- a) Hva er verdien til binomialkoeffisienten $\binom{9}{3}$?
- b) På hvor mange måter kan ordet KULTURUKE stokkes om?
- c) Hvor mange permutasjoner er det av heltallene fra 1 til 5?
- d) Hvor mange permutasjoner er det av heltallene fra 1 til 5 der 5 står i midten?

Oppgave 7

Gitt differensligningen $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 8$.

- a) Finn a_2 og a_3 .
- b) Finn en formel for a_n . Sjekk at formelen din stemmer ved å sette inn $n = 2$ og 3 . Da skal du få de samme resultatene som i punkt a).
- c) Finn a_8 ved for eksempel å sette inn i formelen du fant i punkt b) eller ved å fortsette som i punkt a), dvs. ved å regne ut a_4 , a_5 , osv. til du kommer til a_8 .

Oppgave 8

La $A = \{11, 12, 13, \dots, 28, 29, 30\}$ og $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 17, 18\}$. Definér funksjonen $f: A \rightarrow B$ ved at for hvert heltall $a \in A$ skal $f(a)$ være produktet av første og andre siffer i a . Det betyr for eksempel at $f(11) = 1 \cdot 1 = 1$ og $f(25) = 2 \cdot 5 = 10$.

- a) Finn $|A|$ og $|B|$, dvs. finn antallet elementer i de to mengdene.
- b) Skriv opp de tallene fra mengden B som er primtall.
- c) Finn verdimengden til f ?
- d) Er f en-til-en?
- e) Er f på?

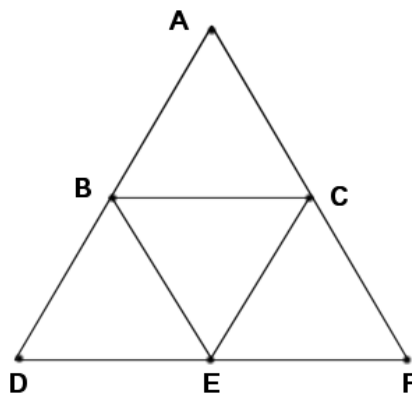
Oppgave 9

La $A = \{a, b, c, d\}$ og R relasjonen på A gitt ved $R = \{(a, b), (a, d), (b, d), (c, b), (d, c)\}$.

- Tegn grafen G_R til R .
- Sett opp matrisen M_R til R .
- Er R refleksiv? Er R symmetrisk? Er R antisymmetrisk? Er R transitiv?
- Finn det logiske (boolske) matriseproduktet $M_R \odot M_R$.
- Sett opp alle par av elementer fra A som er slik at det i grafen G_R går en vei med lengde 3 fra det første elementet til det andre. Sett i hvert tilfelle opp hvilke elementer som inngår i veien. For eksempel skal paret (b, b) være med siden det går en vei med lengde 3 fra b til b . Det er veien b, d, c, b .

Oppgave 10

Gitt følgende graf:



- Sett opp graden til hvert punkt i grafen.
- Finnes det en lukket Euler-vei i grafen? Hvis ja, sett opp en slik vei.
- Anta at en kant i grafen er fjernet. Vil det da finnes en lukket Euler-vei? Hva med en åpen Euler-vei?
- Du skal nå fjerne to kanter i grafen slik at den fortsatt er sammenhengende.
 - Er det mulig å fjerne to kanter slik at grafen får en lukket Euler-vei?
 - Er det mulig å fjerne to kanter slik at grafen får en åpen Euler-vei?
 - Er det mulig å fjerne to kanter slik at grafen hverken får en lukket eller en åpen Euler-vei?

Definisjoner og formler

Logiske operatorer:

$\neg$ (ikke), $\wedge$ (og), $\vee$ (eller), $\oplus$ (eksklusiv eller), $\rightarrow$ (implikasjon)

Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \quad p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x) \quad \neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

Noen mengdeidentiteter:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Kardinalitet – antallet elementer i en union:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Funksjoner:

I funksjonen $f: A \rightarrow B$ betyr A definisjonsmengde og B verdidiområde. En funksjon $f: A \rightarrow B$ er en-til-en hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon $f: A \rightarrow B$ er på hvis $\forall (b \in B) \exists (a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

Matriser

La A være en $m \times n$ -matrise. Den transponerte til A betegnes med A^T og er den $n \times m$ -matrisen vi får når radene og kolonnene i A byttes om.

Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen), div og mod:

La a være et heltall og d et positivt heltall. Da finnes entydige heltall q og r med $0 \leq r < d$ slik at $a = dq + r$. Operasjonene **div** og **mod** defineres ved at $a \text{ div } d = q$ og $a \text{ mod } d = r$.

Moduloregning:

La m være et positivt heltall. To heltall a og b kalles kongruente *modulo* m hvis m går opp i $a - b$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

Summen av rekker:

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^n ar^k = a \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, r \neq 1$

Aritmetisk rekke: La a være første ledd, b siste ledd og d differensen mellom to og to ledd. Antall ledd n er gitt ved $n = \frac{b-a}{d} + 1$ og summen er lik $\frac{(a+b)n}{2}$

Binomialkoeffisienter:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Antall forskjellige utvalg på r stykker fra en samling på n stykker:

Ordnet uten tilbakelegging: $n(n-1)\cdots(n-r+1)$

Uordnet uten tilbakelegging: $\binom{n}{r}$

Ordnet med tilbakelegging: n^r

Uordnet med tilbakelegging: $\binom{n+r-1}{r}$

Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:

Hvis N objekter skal plasseres i k bokser, må minst

én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

Differensligninger:

Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der c_1 og c_2 er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2.$$

Hvis det karakteristiske polynomet har to forskjellige reelle løsninger r_1 og r_2 , blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomet har kun én løsning r_0 , blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Relasjoner:

En relasjon R på en mengde A er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La R være en relasjon på en mengde A .

R er refleksiv hvis $(a, a) \in R$ for alle $a \in A$.

R er symmetrisk hvis $(a, b) \in R$, så er $(b, a) \in R$.

R er antisymmetrisk hvis $a \neq b$ og $(a, b) \in R$, så er $(b, a) \notin R$.

R er transitiv hvis $(a, b) \in R$ og $(b, c) \in R$, så er $(a, c) \in R$.

En partisjon

En samling delmengder $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ av en mengde A utgjør en partisjon av A hvis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = A$ og $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$.

Ekvivalensrelasjoner

En relasjon R på en mengde A er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Ekvivalensklasser

Hvis R er en ekvivalensrelasjon på en mengde A og $a \in A$, så er ekvivalensklassen $[a]$ til a definert ved $[a] = \{b \in A \mid (a, b) \in R\}$. Eller med ord: $[a]$ er lik mengden av de $b \in A$ som er relatert til a . Ekvivalensklassene til en relasjon utgjør en partisjon av A .

Delvis- eller partiell ordning

En relasjon R er en delvis ordning hvis den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

Grafteori:

Graden til et punkt. La a være et punkt (eng: vertex) i en urettet graf. Graden $\text{grad}(a)$ til a er antallet kanter knyttet til punktet.

Grad-kant-setningen:

La G være en urettet graf med endelig mange kanter. Da vil summen av gradene til punktene i G være dobbelt så stor som antallet kanter.

Eulers setning:

En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en lukket Euler-vei (en Euler-sykel) hvis og bare hvis alle punktene i grafen har partallsgrad.

En sammenhengende urettet graf har en åpen (ikke-lukket) Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to punkter i grafen har oddetallsgrad.