Eksamen i Diskret matematikk 28. februar 2012

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a)
i) $p \wedge \neg q$ ii) $\neg p \wedge \neg q$ iii) $q \to \neg p$ iv) $p \to \neg q$

b) iii) og iv) er ekvivalente siden den ene er den kontrapositive til den andre. F. eks. er den kontrapositive til $q \to \neg p$ lik $\neg\neg p \to \neg q$ som er det samme som $p \to \neg q$.

c)

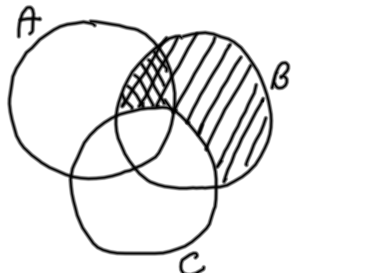
p	q	r	$p \to r$	$q \to r$	$p \vee q$	$(p \vee q) \to r$	$(p \to r) \wedge (q \to r)$
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	U	U	U	S	U	U
S	U	S	S	S	S	S	S
S	U	U	U	S	S	U	U
U	S	S	S	S	S	S	S
U	S	U	S	U	S	U	U
U	U	S	S	S	U	S	S
U	U	U	S	S	U	S	S

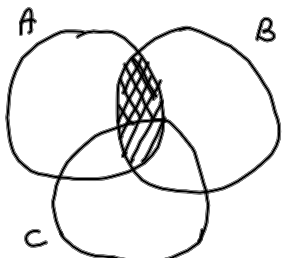
kolonnene er like

Konklusjon:
$(p \vee q) \to r$ og $(p \to r) \wedge (q \to r)$ er ekvivalente siden de tilhørende kolonnene i sannhetsverditabellen er like.

Oppgave 2

a)

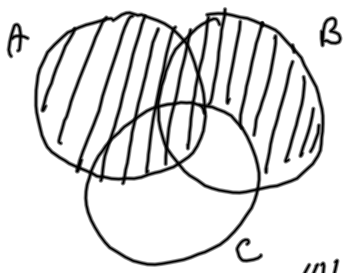




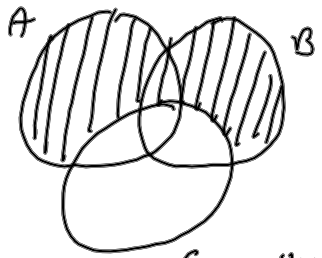
$B - C$ //// $A \cap (B - C)$ ##### $A \cap B$ //// $(A \cap B) - C$ #####

Venndiagrammene viser at $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

b)



$A \cup (B - C)$ ////



$(A \cup B) - C$ ////

Vi ser av Venndiagrammene at $A \cup (B-C) \neq (A \cup B) - C$

c) F.eks. $(A \cap C) - B$.

Oppgave 3

a)
$$B = A \odot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)
$$A \vee B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c)
$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d)
$$A^{[3]} = A \odot A^{[2]} = A \odot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \vee A^{[2]} \vee A^{[3]} = A \vee B \vee A^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

a) $101010111100_2 = 2048 + 512 + 128 + 32 + 16 + 8 + 4 = 2748_{10}$

Her hadde det nok vært enklere å løse f.eks. b) eller c) først og så bruke det til å finne tallet på desimalform.

b) $\underbrace{101}_{5}|\underbrace{010}_{2}|\underbrace{111}_{7}|\underbrace{100}_{4}{}_2 = 5274_8$

c) $\underbrace{1010}_{A}\,|\,\underbrace{1011}_{B}\,|\,\underbrace{1100}_{C}\,{}_2 = ABC_{16}$

Dette kunne vi ha gjort om til desimal form ved

$$ABC_{16} = A\cdot 16^2 + B\cdot 16 + C = 10\cdot 256 + 11\cdot 16 + 12 = 2748_{10}$$

d)

$$\begin{array}{r|l} 185 & 2 \\ \hline 92 & 1 \\ 46 & 0 \\ 23 & 0 \\ 11 & 1 \\ 5 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

$185_{10} = 10111001_2$

e)

$$\begin{array}{r} {}^{1}\;{}^{1}\;{}^{1}\quad \\ F\,F\,F_{16} \\ +\quad\quad 1\;\; \\ \hline 1\,0\,0\,0_{16} \end{array}$$

Oppgave 5

a) $a_2 = 2a_1 + 3a_0 = 2\cdot 2 + 3\cdot 2 = 10$

$a_3 = 2a_2 + 3a_1 = 2\cdot 10 + 3\cdot 2 = 26$

b) Karakteristisk polynom: $r^2 = 2r + 3$, $r^2 - 2r - 3 = 0$

Løsning: $r = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2\pm 4}{2}$, $r_1 = 3$, $r_2 = -1$

Generell løsning av differensligningen: $a_n = \alpha\, 3^n + \beta(-1)^n$.

Bibetingelser: $\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 2 \\ 3\alpha - \beta = 2 \end{array}\right\}$ $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

Løsning: $a_n = 3^n + (-1)^n$

c) $a_8 = 3^8 + (-1)^8 = 3^8 + 1 = 6562$

Oppgave 6

a) $\binom{6}{2} = \dfrac{6\cdot 5}{2} = 15$, $\binom{6}{3} = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} = 20$

b) Geometrisk rekke: $a = 3$, $r = -2$, $n = 10$

$$\text{Sum} = a\,\frac{r^{n+1}-1}{r-1} = 3\,\frac{(-2)^{11}-1}{-3} = 1-(-2)^{11} = 1 + 2^{11} = 2049$$

c) Aritmetisk rekke:
første ledd: 20, differens: 3, siste ledd: 101,
antall ledd: $\frac{101-20}{3}+1=28$

Sum: $\frac{20+101}{2}\cdot 28 = 1694$

d) Basistrinnet: Vi har at 6 går opp i $5^1-3^1-2^1=0$.
Induksjonstrinnet: Anta at 6 går opp i $5^k-3^k-2^k$ for en $k\geq 1$. Vi må vise at 6 går opp i $5^{k+1}-3^{k+1}-2^{k+1}$.

Vi har $5^{k+1}-3^{k+1}-2^{k+1} = 5\cdot 5^k - 3\cdot 3^k - 2\cdot 2^k$
$= 5\cdot 5^k - 3\cdot 3^k \underbrace{-2\cdot 3^k + 2\cdot 3^k}_{0} - 2\cdot 2^k \underbrace{-3\cdot 2^k + 3\cdot 2^k}_{0}$
$= 5(5^k-3^k-2^k) + 2\cdot 3^k + 3\cdot 2^k = \underbrace{5(5^k-3^k-2^k)}_{} + \underbrace{6(3^{k-1}+2^{k-1})}_{}$.

6 går opp

Konklusjonen blir at 6 går opp i $5^{k+1}-3^{k+1}-2^{k+1}$. Induksjonsprinsippet gir dermed at 6 går opp i $5^n-3^n-2^n$ for alle $n\geq 1$.

Oppgave 7

a) Det er 26 muligheter på første og på siste plass og $26+10=36$ muligheter på hver av de andre plassene. Totalt blir det $26^2\cdot 36^6$ mulige passord.

b) For å få like mange bokstaver som siffer må det være to bokstaver blant de seks på midten. Disse to kan velges på $\binom{6}{2}$ måter. De øvrige av de seks må være siffer. Totalt $26^2\cdot\binom{6}{2}26^2\cdot 10^4 = 15\cdot 10^4\cdot 26^4$.

c) Da kan det være 8, 7, 6 eller 5 bokstaver.
Det blir $26^8 + 26^7\cdot\binom{6}{1}\cdot 10^1 + 26^6\cdot\binom{6}{2}\cdot 10^2 + 26^5\cdot\binom{6}{3}10^3$
$= 26^8 + 6\cdot 10\cdot 26^7 + 15\cdot 10^2\cdot 26^6 + 20\cdot 10^3\cdot 26^5$.

Oppgave 8

a) $f(22) = 22 \bmod 11 = 0$, $g(22) = 22 \operatorname{div} 11 = 2$

$f(23) = 23 \bmod 11 = 1$, $g(23) = 23 \operatorname{div} 11 = 2$

$f(33) = 33 \bmod 11 = 0$, $g(33) = 33 \operatorname{div} 11 = 3$

b) Når et ikke-negativt heltall deles med 11, blir resten et av tallene fra 0 til 10. Dermed $V_f = \{0, 1, \dots, 10\}$. Kvotienten ved divisjonen blir et tall fra 0 og oppover. Dermed $V_g = A$.

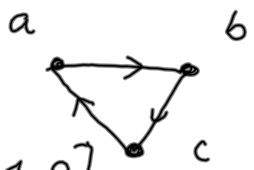
c) f er ikke en-til-en siden $22 \neq 33$, mens $f(22) = f(33) = 0$
g er ikke en-til-en siden $22 \neq 23$, mens $g(22) = g(23) = 2$

Siden $f: A \to A$ og $V_f = \{0, 1, \dots, 10\} \neq A$, er f ikke på.

$g: A \to A$ er på siden $V_g = A$.

Oppgave 9

a) Grafen G_R til R:



b) Matrisen M_R til R: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

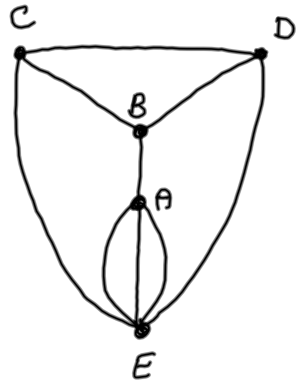
c) En relasjon er refleksiv hvis alle par av typen (x,x) er med. Derfor må vi ta med (a,a), (b,b) og (c,c).

d) En relasjon er symmetrisk hvis et par av typen (x,y) er med, så må også (y,x) være med. Derfor må vi ta med (b,a), (c,b) og (a,c).

e) En relasjon er transitiv hvis par av typen (x,y) og (y,z) er med, så må også (x,z) være med. Derfor må både (a,c), (b,a) og (c,b) være med. Videre hvis (a,b) og (b,a) er med, må (a,a) være med. Osv. Tilsammen får vi at alle de ni mulige parene må være med.

Oppgave 10

a)



b) grad (A) = 4, grad (B) = 3, grad (C) = 3, grad (D) = 3, grad (E) = 5.

c) Det å starte i et av rommene eller utendørs og så gå gjennom hver dør nøyaktig én gang, svarer til en Euler-vei i grafen i punkt a). Men den grafen har hverken en åpen eller lukket Euler-vei siden den har fire punkter med oddetallsgrad.

d) Det å sette inn en ytterdør betyr en ekstra kant mellom enten A, B, C eller D og E. En ny kant mellom A og E betyr at grad (A) blir 5 og grad(E) blir 6. Men da blir det fortsatt fire punkter med oddetallsgrad.

Men en ytterdør i f.eks. B vil fungere. Da vil grad (E) bli 6 og grad (B) bli 4. Dermed vil kun C og D ha oddetallsgrad. Da finnes det en åpen Euler-vei. Det hadde også fungert med en ytterdør i C eller i D.