HØGSKOLEN I OSLO
OG AKERSHUS

Fakultet for teknologi, kunst og design
Teknologiske fag

Eksamen i: Diskret matematikk

Målform: Bokmål

Dato: 28 .02.2012

Tid: 5 timer / kl. 9 - 14

Antall sider (inkl. forside): 9

Antall oppgaver: 10

Tillatte hjelpemidler: Håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig.
Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Besvarelsen skal merkes med kandidatnummer, ikke navn.
Bruk blå eller sort kulepenn på innføringsarket.

Faglig veileder: Ulf Uttersrud

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Instituttleders/ Programkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Instituttleder/ Programkoordinator	
Ulf Uttersrud		Roy Istad		

Emnekode: FO019A – FO019I

Alle de 10 oppgavene teller likt. I oppgaver med underpunkter vil krevende og mer omfattende underpunkter kunne telle mer enn lette og enkle underpunkter. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave. **Alle svar skal begrunnes!** Det kan for eksempel skje ved at du tar med mellomregninger eller gir andre former for argumentasjon. **Kun et svar uten noen begrunnelse er normalt verdiløst.**

Oppgave 1

a) La utsagnene p og q være gitt ved p : "*Det regner*" og q : "*Det blåser*". Skriv flg. utsagn ved hjelp av p , q og logiske operatorer (obs: oppholdsvær betyr at det ikke regner og vindstille betyr at det ikke blåser):

i) Det regner, men det blåser ikke.
ii) Det er oppholdsvær og vindstille.
iii) Hvis det blåser, så regner det ikke.
iv) Det regner bare hvis det ikke blåser.

b) Er utsagnene *iii)* og *iv)* i punkt a) ekvivalente?

c) La p , q og r være utsagn. Avgjør om utsagnene $(p \vee q) \to r$ og $(p \to r) \wedge (q \to r)$ er ekvivalente.

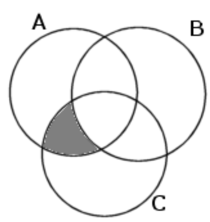
Oppgave 2

La A, B og C være vilkårlige mengder.

a) Avgjør om mengdene $A \cap (B - C)$ og $(A \cap B) - C$ er like.

b) Avgjør om mengdene $A \cup (B - C)$ og $(A \cup B) - C$ er like.

c) Lag en mengdeformel, ved hjelp av mengdene A, B og C og mengdeoperatorer, som svarer til det grå området i flg. Venn-diagram:



Oppgave 3

Gitt den logiske (boolske) matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. La $B = A^{[2]} = A \odot A$ være det logiske (boolske) matriseproduktet av A med seg selv.

a) Vis at $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Finn $A \vee B$.

c) Finn $A \wedge B$.

d) Finn $A \vee A^{[2]} \vee A^{[3]}$.

Oppgave 4

a) Finn tallet 101010111100_2 på desimal form.

b) Finn tallet 101010111100_2 på oktal form.

c) Finn tallet 101010111100_2 på heksadesimal form.

d) Finn tallet 185_{10} på binær form.

e) Gitt tallet $n = FFF_{16}$. Finn $n+1$ på heksadesimal form.

Oppgave 5

Gitt differensligningen $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $n > 1$, $a_0 = 2$, $a_1 = 2$.

a) Finn a_2 og a_3.
b) Finn en formel for a_n .
c) Finn a_8.

Oppgave 6

a) Regn ut binomialkoeffisientene $\binom{6}{2}$ og $\binom{6}{3}$.

b) Finn summen 3 – 6 + 12 – 24 + 48 – 96 + . . . + 3072.

c) Finn summen 20 + 23 + 26 + 29 + . . . + 98 + 101.

d) Vis ved induksjon at 6 går opp i $5^n - 3^n - 2^n$ for alle $n \geq 1$.

Oppgave 7

Et passord til et datasystem skal inneholde nøyaktig 8 tegn. Lovlige tegn er de 26 bokstavene A – Z og de ti sifrene 0 – 9. I de flg. punktene holder det å sette opp en formel som svar. De eksakte tallsvarene kan bli ganske store og du trenger ikke å regne dem ut.

a) Et passord skal starte og slutte med en bokstav. Hvor mange forskjellige passord av denne typen finnes det?

b) Hvor mange forskjellige passord er det som oppfyller kravet i a) og som har like mange bokstaver som siffer?

c) Hvor mange forskjellige passord er det som oppfyller kravet i a) og som har flere bokstaver enn siffer?

Oppgave 8

La A være mengden av de ikke-negative hele tallene, dvs. $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. La funksjonene $f : A \to A$ og $g : A \to A$ være definert ved $f(k) = k$ mod 11 og $g(k) = k$ div 11 for $k \in A$.

a) Finn $f(k)$ og $g(k)$ for $k = 22$, $k = 23$ og $k = 33$.

b) Hva blir verdimengdene til f og g?

c) Er f en-til-en? Er g en-til-en? Er f på? Er g på?

Oppgave 9

La $A = \{a, b, c\}$ og R relasjonen på A gitt ved $R = \{(a,b), (b,c), (c,a)\}$.

a) Tegn grafen G_R til R.

b) Sett opp matrisen M_R til R.

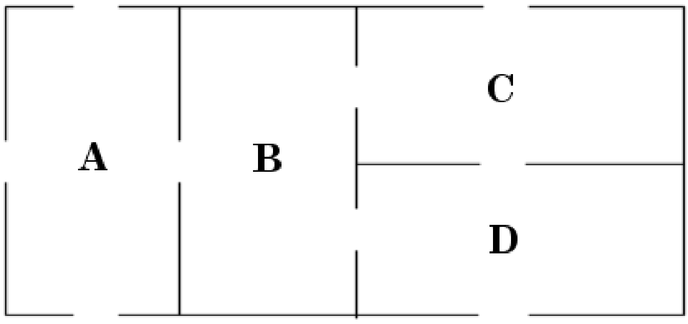
c) Ta utgangspunkt i R slik den er gitt i starten. Hvilke par fra $A \times A$ må tas med i tillegg for å få en refleksiv relasjon?

d) Ta utgangspunkt i R slik den er gitt i starten. Hvilke par fra $A \times A$ må tas med i tillegg for å få en symmetrisk relasjon?

e) Ta utgangspunkt i R slik den er gitt i starten. Hvilke par fra $A \times A$ må tas med i tillegg for å få en transitiv relasjon?

HØGSKOLEN I OSLO
OG AKERSHUS

Oppgave 10



E (utendørs)

Figuren over viser rommene i et hus. Det er fire rom med navn A, B, C og D. I hvert rom er det et antall dører (markert på figuren med åpninger). For eksempel er det fire dører i rom A. De dørene som går ut (til E) kalles ytterdører og de som går mellom to rom kalles innerdører.

a) La hvert av rommene (A, B, C, D) og utendørs (E) være punkter i en graf med dørene som kanter mellom punktene. Tegn grafen.

b) Sett opp graden til hvert av de fem punktene i grafen.

c) Det er umulig å starte i et av rommene eller eventuelt utendørs og så gå gjennom hver dør nøyaktig én gang. Hvorfor?

d) Er det mulig å starte i et av rommene eller eventuelt utendørs og så gå gjennom hver dør nøyaktig én gang hvis det settes inn en ekstra ytterdør? Hvor måtte den i så fall settes inn?

Definisjoner og formler

Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $\quad$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\quad$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$p \to q \equiv \neg p \vee q$ $\quad$ $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$ $\quad$ $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

Noen mengdeidentiteter:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\quad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Kardinalitet – antallet elementer i en union:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Funksjoner:

I funksjonen $f : A \to B$ betyr A definisjonsmengde og B verdiområde. En funksjon $f : A \to B$ er en-til-en hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon $f : A \to B$ er på hvis $\forall (b \in B)\ \exists (a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

Matriser

La A være en $m \times n$-matrise. Den transponerte til A betegnes med A^T og er den $n \times m$-matrisen vi får når radene og kolonnene i A byttes om.

Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen), div og mod:

La a være et heltall og d et positivt heltall. Da finnes entydige heltall q og r med $0 \le r < d$ slik at $a = dq + r$. Operasjonene **div** og **mod** defineres ved at
a div $d = q$ og a mod $d = r$.

Moduloregning:

La m være et positivt heltall. To heltall a og b kalles kongruente *modulo* m hvis m går opp i $a-b$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

Rekker:

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^{n} a r^k = a\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$, $r \neq 1$

Aritmetisk rekke: Summen av første og siste ledd ganget med antall ledd, delt med 2.

Binomialkoeffisienter:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}, \qquad \binom{n}{0}=1, \qquad \binom{n}{1}=n, \qquad \binom{n}{n}=1,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \qquad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

Antall forskjellige utvalg på r stykker fra en samling på n stykker:

Ordnet uten tilbakelegging: $n(n-1)\cdots(n-r+1)$

Uordnet uten tilbakelegging: $\binom{n}{r}$

Ordnet med tilbakelegging: n^r

Uordnet med tilbakelegging: $\binom{n+r-1}{r}$

Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:

Hvis N objekter skal plasseres i k bokser, må minst én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

Differensligninger:

Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der c_1 og c_2 er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2 .$$

Hvis det karakteristiske polynomet har to forskjellige reelle løsninger r_1 og r_2, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomet har kun én løsning r_0, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Relasjoner:

En relasjon R på en mengde A er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La R være en relasjon på en mengde A.

R er refleksiv hvis $(a,a) \in R$ for alle $a \in A$.

R er symmetrisk hvis $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \in R$.

R er antisymmetrisk hvis $a \neq b$ og $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \notin R$.

R er transitiv hvis $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$, så er $(a,c) \in R$.

En partisjon

En samling delmengder A_1, A_2, A_3, . . . , A_n av en mengde A utgjør en partisjon av A hvis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ . \ . \ . \cup A_n = A$ og $A_i \cap A_j = \text{Ø}$ for alle $i \neq j$.

HØGSKOLEN I OSLO
OG AKERSHUS

Ekvivalensrelasjoner

En relasjon R på en mengde A er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Ekvivalensklasser

Hvis R er en ekvivalensrelasjon på en mengde A og $a \in A$, så er ekvivalensklassen $[a]$ til a definert ved $[a] = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$. Eller med ord: $[a]$ er lik mengden av de $b \in A$ som er relatert til a. Ekvivalensklassene til en relasjon utgjør en partisjon av A.

Delvis- eller partiell ordning

En relasjon R er en delvis ordning hvis den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

Grafteori:

Graden til et punkt. La a være et punkt (eng: vertex) i en urettet graf. Graden $grad(a)$ til a er antallet kanter knyttet til punktet.

Grad-kant-setningen:

La G være en urettet graf med endelig mange kanter. Da vil summen av gradene til punktene i G være dobbelt så stor som antallet kanter.

Eulers setning:

En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en lukket Euler-vei (en Euler-sykel) hvis og bare hvis alle punktene i grafen har partallsgrad.

En sammenhengende urettet graf har en åpen (ikke-lukket) Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to punkter i grafen har oddetallsgrad.