

# Eksamen i Diskret matematikk tirsdag 22. februar 2011

## Løsningsforslag

### Oppgave 1

a) i)  $\forall x P(x, \text{Kari})$  ii)  $\neg \exists x P(x, \text{Per})$  iii)  $\neg \forall x \exists y P(x, y)$

b) Husk at  $p \oplus q$  er sann når  $p$  og  $q$  har forskjellige sannhetsverdier, og er usann når de har like verdier.

| $P$ | $q$ | $\neg P$ | $\neg q$ | $P \wedge \neg q$ | $q \wedge \neg P$ | $(P \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg P)$ | $P \oplus q$ |
|-----|-----|----------|----------|-------------------|-------------------|--------------------------------------------|--------------|
| S   | S   | U        | U        | U                 | U                 | U                                          | U            |
| S   | U   | U        | S        | S                 | U                 | S                                          | S            |
| U   | S   | S        | U        | U                 | S                 | S                                          | S            |
| U   | U   | S        | S        | U                 | U                 | U                                          | U            |

Vi ser at de to siste kolonne er like. Det betyr at  $(P \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg P)$  er ekvivalent med  $P \oplus q$ .

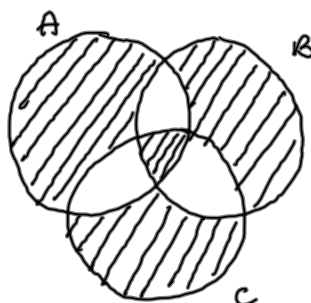
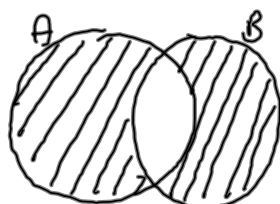
c) Ta f.eks. utsagnet  $P \wedge \neg P \wedge q$ . Det er alltid usant.

### Oppgave 2

$$a) A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 7\} \cup \{4, 5\} = \{1, 4, 5, 7\}$$

$$(A \oplus B) \oplus C = \{1, 4, 5, 7\} \oplus \{3, 5, 6, 7\} = \{1, 4\} \cup \{3, 6\} = \{1, 3, 4, 6\}$$

b)



c) Dette kan gjøres på mange måter, f.eks.  $(A \cup B \cup C) - (A \oplus B \oplus C)$  eller  $((A \cap B) - C) \cup ((B \cap C) - A) \cup ((A \cap C) - B)$ .

Oppgave 3

a)  $10 \operatorname{div} 3 = 3$  ,  $10 \bmod 3 = 1$

b)  $f(0) = (0 \operatorname{div} 3) + (0 \operatorname{div} 5) = 0 + 0 = 0$

$f(5) = (5 \operatorname{div} 3) + (5 \operatorname{div} 5) = 1 + 1 = 2$

$f(10) = (10 \operatorname{div} 3) + (10 \operatorname{div} 5) = 3 + 2 = 5$

$f(20) = (20 \operatorname{div} 3) + (20 \operatorname{div} 5) = 6 + 4 = 10$

c) Vi har  $f(1) = (1 \operatorname{div} 3) + (1 \operatorname{div} 5) = 0 + 0 = 0$ .

Dermed er  $f(0) = f(1)$ . Det betyr at  $f$  ikke er en-til-en.

d) Denne oppgaven er litt vanskelig.

Ved innsetting ser vi at  $f(3) = 1$ ,  $f(6) = 3$ ,  
 $f(9) = 4$  og  $f(12) = 6$ . Dermed har vi sammen med  
 det vi fant i b) at tallene 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 er  
 med i verdimengden til  $f$ . Men hva med 7?

Vi ser at  $f(14) = 6$  og  $f(15) = 8$ . Det betyr at  
 det ikke finnes noen  $a$  slik at  $f(a) = 7$  siden  
 funksjonen  $f$  er voksende. Dermed er 7 ikke med  
 i verdimengden til  $f$  og  $f$  er ikke på.

Men hva blir verdimengden til  $f$ ? Det kan vises  
 at den består av alle naturlige tall bortsett fra  
 de på formen  $k(3+5)-1$ ,  $k=1, 2, 3, \dots$ , dvs.  
 bortsett fra tallene 7, 15, 23, 31,  $\dots$

Oppgave 4

a)  $A + B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  ,  $A - B = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

b)  $AB = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$  ,  $BA = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$

Oppgave 5

$$a) \quad a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 15 - 6 = 9$$

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 5 = 27 - 10 = 17$$

b) Karakteristisk polynom:  $x^2 = 3x - 2$ ,  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .

Det gir  $x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$ ,  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1$ .

Generell løsning:  $a_n = \alpha 2^n + \beta 1^n = \alpha 2^n + \beta$ .

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \alpha + \beta = 3 \\ a_1 &= 2\alpha + \beta = 5 \end{aligned} \right\} \alpha = 2, \beta = 1.$$

Løsning:  $a_n = 2 \cdot 2^n + 1 = 2^{n+1} + 1$ .

c)  $a_{10} = 2^{11} + 1 = 2049$ .

d)  $s_m = \sum_{k=0}^{m-1} a_k = \sum_{k=0}^{m-1} 2 \cdot 2^k + 1 = 2 \sum_{k=0}^{m-1} 2^k + \sum_{k=0}^{m-1} 1 = 2 \frac{2^m - 1}{2 - 1} + m$

$$= 2^{m+1} - 2 + m.$$

e)  $s_4 = 3 + 5 + 9 + 17 = 34$ . Bruker vi formelen får vi

$$s_4 = 2^{4+1} - 2 + 4 = 32 - 2 + 4 = 34.$$

$$s_{10} = 2^{11} - 2 + 10 = 2056.$$

Oppgave 6

a)  $a = 252 = 2 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 63 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$

$$b = 102 = 2 \cdot 51 = 2 \cdot 3 \cdot 17$$

$$\gcd(a, b) = 2 \cdot 3 = 6$$

b)  $\text{lcm}(a, b) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 = 4284$

Alternativt:  $= ab / \gcd(a, b) = \frac{252 \cdot 102}{6} = 4284$

c)

| a   | b   | $\pi$ |
|-----|-----|-------|
| 252 | 102 | 48    |
| 102 | 48  | 6     |
| 48  | 6   | 0     |

Vi ser at 6 er største felles divisor.

### Oppgave 7

a)

| 711 | 2 |
|-----|---|
| 355 | 1 |
| 177 | 1 |
| 88  | 1 |
| 44  | 0 |
| 22  | 0 |
| 11  | 0 |
| 5   | 1 |
| 2   | 1 |
| 1   | 0 |
| 0   | 1 |

$$711_{10} = 1011000111_2$$

$$= \underbrace{1}_{1} \underbrace{011}_{3} \underbrace{000}_{0} \underbrace{111}_{7} = 1307_8$$

b)

$$\underbrace{1100}_C \underbrace{1100}_C \underbrace{1100}_C_2 = CCC_{16} = \sum_{k=0}^2 C \cdot 16^k$$

$$= C \cdot \frac{16^3 - 1}{16 - 1} = 12 \cdot \frac{4096 - 1}{15} = 3276_{10}$$

c)

|     |     |    |   |   |   |
|-----|-----|----|---|---|---|
| 711 | 142 | 28 | 5 | 0 | 1 |
| 5   | 1   | 2  | 3 | 0 | 1 |

$$711_{10} = 10321_5$$

### Oppgave 8

a) Det er 9 mulige siffer på første plass og 10 mulige siffer på hver av de fire øvrige plassene. Dermed

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000 \text{ mulige pin-koder.}$$

b) Det er 9 mulige siffer på første plass. Når en av disse er valgt, er det igjen 9 muligheter på andre plass, så 8 muligheter på tredje plass, osv.

Dermed  $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$  mulige pin-koder der alle de fem sifrene er ulike.

c) Hvis 5 står først, kan det velges 5 to steder av de øvrige plassene på  $\binom{4}{2} = 6$  måter. På de to stedene der det ikke skal stå 5, er det 9 muligheter. Dermed  $6 \cdot 9 \cdot 9 = 486$  muligheter.

Hvis 5 ikke står først, er det 8 muligheter som første siffer. På de øvrige fire plassene kan tre 5-ere velges på  $\binom{4}{3} = 4$  måter. På den siste plass er det 9 muligheter. Dermed  $8 \cdot 4 \cdot 9 = 288$  muligheter.

Tilsammen  $486 + 288 = 774$  muligheter.

d) Vi finner først det omvendte, dvs. hvor mange det er som har tre like, fire like og fem like.

1) Fem like : 11111, 22222, ..., 99999 9 muligheter.

2) Fire like : Hvis det er de fire siste av de fem sifrene som er like, er  $9 \cdot 9 = 81$  muligheter. Hvis første siffer skal høre med til de fire like blir det

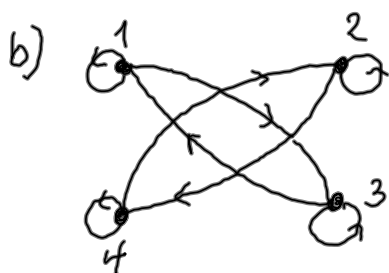
$9 \cdot \binom{4}{3} \cdot 9 = 9 \cdot 4 \cdot 9 = 324$  muligheter. Tilsammen  $324 + 81 = 405$ .

3) Tre like : I c) fant vi at det var 774 tilfeller med nøyaktig tre 5-ere. Samme argument gjelder for alle fall fra 1 til 9. Dermed  $774 \cdot 9 = 6966$  slike. Skal vi ha tre 0-er blir det  $9 \cdot \binom{4}{3} \cdot 9 = 9 \cdot 4 \cdot 9 = 324$  muligheter. Tilsammen  $6966 + 324 = 7290$ .

Konklusjon :  $90000 - (7290 + 405 + 9) = 82296$  lovlige pin-koder som ikke har tre eller flere like siffer.

## Oppgave 9

a)  $R = \{ (1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4) \}$



c)

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d)  $R$  er refleksiv siden  $a+a = 2a$  alltid er et partall.  
 $R$  er symmetrisk fordi hvis  $a+b$  er partall, så er  $b+a$  partall.  
 $R$  er transitiv fordi hvis  $a+b$  er partall og  $b+c$  er partall, dvs.  $a+b = 2m$  og  $b+c = 2n$ , så er  $a+c = 2(m+n-b)$  et partall.  $R$  er dermed en ekvivalensrelasjon.

e)  $[1] = \{1, 3\}$ ,  $[2] = \{2, 4\}$ ,  $[3] = \{1, 3\}$ ,  $[4] = \{2, 4\}$ .  
 Det er med andre ord to forskjellige ekvivalensklasser

### Oppgave 10

a)  $\text{grad}(a) = 2$ ,  $\text{grad}(b) = 2$ ,  $\text{grad}(c) = 4$ ,  $\text{grad}(d) = 4$ ,  
 $\text{grad}(e) = 4$ ,  $\text{grad}(f) = 4$ ,  $\text{grad}(g) = 4$ ,  $\text{grad}(h) = 4$ ,  
 $\text{grad}(i) = 4$ ,  $\text{grad}(j) = 2$ ,  $\text{grad}(k) = 2$ .

b) Grafen har en lukket Euler-vei fordi alle punktene har partallsgrad.

c) F.eks.  $a, c, b, e, h, k, i, h, f, e, c, d, f, g, i, j, g, d, a$