høgskolen i oslo
www.hio.no

Avdeling for ingeniørutdanning

Eksamen i Diskret matematikk

Dato: **22. februar 2011**

Tid: **9 – 14**

Antall sider inklusive forside: **8**

Antall oppgaver: **10**

Tillatte hjelpemidler: **Kun håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst.**

Merknad: **Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig. Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.**

Faglig veileder: **Ulf Uttersrud**

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Studieleders/ Fagkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Studieleder/ Fagkoordinator	
Ulf Uttersrud				

Emnekode: FO019A – FO019I

Alle de 10 oppgavene teller likt. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave.

Alle svar skal begrunnes! Det kan for eksempel skje ved at du tar med mellomregninger eller gir andre former for argumentasjon. Kun et svar uten noen begrunnelse er normalt verdiløst.

Oppgave 1

a) La utsagnsfunksjonen $P(x,y)$ være definert ved setningen «x *er glad i* y» der x og y er personer. Skriv følgende utsagn ved hjelp av logiske operatorer (eng: connectives), kvantorer og utsagnsfunksjonen P:

   i) Alle er glad i Kari. ii) Ingen er glad i Per . ii) Ikke alle er glad i noen.

b) La p og q være utsagn. Avgjør om utsagnene $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ og $p \oplus q$ er ekvivalente. Operatoren $\oplus$ står for ekslusiv eller.

c) Sett opp et sammensatt utsagn der p og q inngår slik at utsagnet blir en selvmotsigelse, dvs. at det alltid er usant.

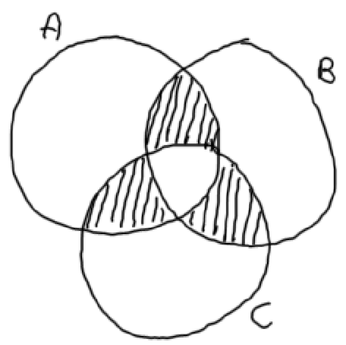
Oppgave 2

La A og B være to mengder. Mengden $A \oplus B$ kalles den eksklusive unionen (eller den symmetriske differensen) til A og B. Den er definert ved $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$.

a) La A, B og C være gitt ved $A = \{1,2,3,7\}$, $B = \{2,3,4,5\}$ og $C = \{3,5,6,7\}$. Finn mengdene $A \oplus B$ og $(A \oplus B) \oplus C$.

b) La A, B og C være vilkårlige mengder. Tegn Venn-diagram og skravér mengdene $A \oplus B$ og $(A \oplus B) \oplus C$.

c) Uttrykk ved hjelp A, B, C og mengdeoperasjoner den mengden som svarer til det skraverte området i flg. Venn-diagram:



Oppgave 3

Hvis a er et heltall og d et positivt heltall, er a **div** d og a **mod** d henholdsvis lik kvotienten og resten når a deles med d. La A være de naturlige tallene. La funksjonen $f : A \to A$ være definert ved $f(a) = (a \textbf{ div } 3) + (a \textbf{ div } 5)$.

a) Finn 10 **div** 3 og 10 **mod** 3.
b) Finn $f(a)$ for $a = 0,\ 5,\ 10$ og 20.
c) Er f en-til-en? Begrunn svaret!
d) Finn verdimengden V_f til f. Er f på? Begrunn svaret!

Oppgave 4

Flg. 2×2-matriser er gitt: $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

a) Finn $A + B$ og $A - B$.
b) Finn matriseproduktene AB og BA.

Oppgave 5

Gitt differensligningen $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, $n > 1$, $a_0 = 3$, $a_1 = 5$.

a) Finn a_2 og a_3.
b) Finn en formel for a_n.
c) Finn a_{10}.
d) La s_n være summen av de n første leddene, dvs. $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ . \ . \ . \ a_{n-1}$.
   Finn en formel for s_n.
e) Finn s_4 og s_{10}.

Oppgave 6

Gitt heltallene $a = 252$ og $b = 102$.

a) Sett opp primtallsfaktoriseringen av a og b og bruk så det til å finne største felles divisor (eng: greatest common divisor) for a og b.
b) Finn minste felles multiplum (eng: least common multiple) for a og b.
c) Finn største felles divisor for a og b ved hjelp av Euklids algoritme. Skriv opp mellomregningen.

Oppgave 7

a) Finn tallet 711_{10} på binær form og på oktal form.
b) Finn tallet 110011001100_2 på desimal form og på heksadesimal form.
c) Finn tallet 711_{10} på pentamal form, dvs. i tallsystemet med 5 som grunntall.

Oppgave 8

En pinkode til et datasystem skal inneholde nøyaktig fem desimale siffer. Pinkoden kan ikke ha 0 som første siffer. For eksempel er 12345 og 70229 lovlige pinkoder, mens 01234 er ulovlig.

a) Hvor mange lovlige pinkoder er det?
b) Hvor mange lovlige pinkoder er det der alle de fem sifrene er ulike?
c) Hvor mange lovlige pinkoder er det som inneholder sifferet 5 nøyaktig tre ganger? For eksempel er pinkoden 53575 et slikt tilfelle.
d) Hvor mange lovlige pinkoder er det som ikke har tre eller flere like siffer?

Oppgave 9

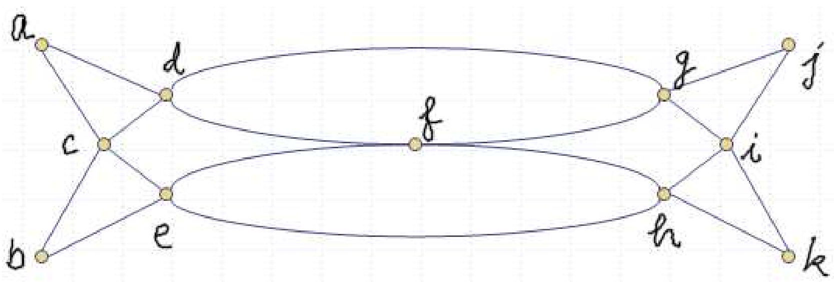
La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og R relasjonen på A gitt ved at $(a,b) \in R$ hvis og bare hvis $a+b$ er et partall. Det betyr for eksempel at $(1,3) \in R$ siden $1+3=4$ er et partall, mens $(4,3) \notin R$ siden $4+3=7$ er et oddetall.

a) Sett opp alle tallparene i relasjonen R.
b) Sett opp grafen G_R til R.
c) Sett opp matrisen M_R til R.
d) R er en ekvivalensrelasjon. Hvorfor? Begrunn svaret!
e) Sett opp ekvivalensklassene til R.

Oppgave 10

Grafen under kalles «Muhammeds sverd».

a) Skriv opp graden til hvert av punktene.
b) Grafen har en lukket Euler-vei. Hvorfor? Begrunn svaret!
c) Finn en lukket Euler-vei, dvs. sett opp punktene som utgjør veien.



Definisjoner og formeler

Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $\quad$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\quad$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$p \to q \equiv \neg p \vee q$ $\quad$ $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$ $\quad$ $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

Noen mengdeidentiteter:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\quad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Kardinalitet – antallet elementer i en union:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Funksjoner:

I funksjonen $f : A \to B$ betyr A definisjonsmengde og B verdiområde. En funksjon $f : A \to B$ er en-til-en hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon $f : A \to B$ er på hvis $\forall (b \in B)\, \exists (a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen), div og mod:

La a være et heltall og d et positivt heltall. Da finnes entydige heltall q og r med $0 \le r < d$ slik at $a = dq + r$. Her kalles q kvotienten og r resten. Operasjonene **div** og **mod** defineres ved at a div $d = q$ og a mod $d = r$.

Moduloregning:

La m være et positivt heltall. To heltall a og b kalles kongruente *modulo* m hvis m går opp i $a - b$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

Rekker:

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^{n} a r^k = a \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$, $r \neq 1$

Aritmetisk rekke: Summen av første og siste ledd ganget med antall ledd, delt med 2.

Binomialkoeffisienter:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}, \qquad \binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \qquad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Antall forskjellige utvalg på r stykker fra en samling på n stykker:

Ordnet uten tilbakelegging:	$n(n-1)\cdots(n-r+1)$
Uordnet uten tilbakelegging:	$\binom{n}{r}$
Ordnet med tilbakelegging:	n^r
Uordnet med tilbakelegging:	$\binom{n+r-1}{r}$

Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:

Hvis N objekter skal plasseres i k bokser, må minst én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

Differensligninger:

Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der c_1 og c_2 er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2 .$$

Hvis det karakteristiske polynomet har to forskjellige reelle løsninger r_1 og r_2, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomet har kun én løsning r_0, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Relasjoner:

En relasjon R på en mengde A er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La R være en relasjon på en mengde A.

R er refleksiv hvis $(a,a) \in R$ for alle $a \in A$.

R er symmetrisk hvis $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \in R$.

R er antisymmetrisk hvis $a \neq b$ og $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \notin R$.

R er transitiv hvis $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$, så er $(a,c) \in R$.

En partisjon

En samling delmengder A_1, A_2, A_3, . . . , A_n av en mengde A utgjør en partisjon av A hvis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ . \ . \ . \cup A_n = A$ og $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$.

Ekvivalensrelasjoner

En relasjon R på en mengde A er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Ekvivalensklasser

Hvis R er en ekvivalensrelasjon på en mengde A og $a \in A$, så er ekvivalensklassen $[a]$ til a definert ved $[a] = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$. Eller med ord: $[a]$ er lik mengden av de $b \in A$ som er relatert til a. Ekvivalensklassene til en relasjon utgjør en partisjon av A.

Delvis- eller partiell ordning

En relasjon R er en delvis ordning hvis den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

Grafteori:

Graden til et punkt i en urettet graf er antallet kanter knyttet til punktet.

Eulers setning:

En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en lukket Euler-vei (en Euler-sykel) hvis og bare hvis alle punktene i grafen har partallsgrad.

En sammenhengende urettet graf har en åpen (ikke-lukket) Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to punkter i grafen har oddetallsgrad.