

Avdeling for ingeniørutdanning

Eksamen i Diskret matematikk

Dato: 23. februar 2010

Tid: 9 – 14

Antall sider inklusive forside: 7

Antall oppgaver: 10

Tillatte hjelpemidler: Kun håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst.

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig. Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Faglig veileder: Ulf Uttersrud

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Studieleders/ Fagkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Studieleder/ Fagkoordinator	
Ulf Uttersrud		Roy Istad		

Emnekode: FO019A

Alle de 10 oppgavene teller likt. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave.

Alle svar skal begrunnes! Det kan for eksempel skje ved at du tar med mellomregninger eller gir andre former for argumentasjon. Kun et svar uten noen begrunnelse er normalt verdiløst.

Oppgave 1

- a) Et logisk utsagn kalles en selvmotsigelse hvis utsagnet alltid er usant. Avgjør om følgende sammensatte utsagn er en selvmotsigelse eller ikke?

$$\neg(r \rightarrow (p \vee q))$$

- b) La m og n være hele tall. Formuler følgende fire utsagn med ord og avgjør hvilke av dem som er sanne:

$$i) \forall m \exists n (m > n), \quad ii) \exists m \forall n (m > n), \quad iii) \forall m \forall n (m > n), \quad iv) \exists m \exists n (m > n)$$

Oppgave 2

- a) La A , B og C være vilkårlige mengder. Lag Venn-diagram og skravér mengden

$$A \cap ((B - C) \cup (C - B)).$$

- b) I en gruppe på 90 personer er det 50 som bruker tog til jobben, 40 som bruker buss og 30 som bruker trikk. Det er videre 10 som bruker både buss og tog, 11 som bruker både buss og trikk, 13 som bruker både tog og trikk og til slutt 3 som bruker alle tre transportmidlene. Hvor mange er det som ikke bruker noen av de tre transportmidlene? Hvor mange er det som kun bruker tog?

Oppgave 3

La A være mengden av de ikke-negative hele tallene, dvs. $A = \{0, 1, 2, \dots\}$. La funksjonene $f: A \rightarrow A$ og $g: A \rightarrow A$ være definert ved $f(n) = n \bmod 11$ og $g(n) = n \div 11$.

- a) Finn $f(n)$ og $g(n)$ for $n = 22$, $n = 23$ og $n = 33$.
 b) Finn verdimengdene V_f og V_g til funksjonene f og g .
 c) Er f en-til-en? Er f på? Er g en-til-en? Er g på?

Oppgave 4

Gitt matrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Finn $A + B$, A^T og AA^T (A^T er den transponerte til A , AA^T er A multiplisert med A^T).

Oppgave 8

- a) Tallet $a = 218_{10}$ er gitt på desimal form. Finn a på binær form og på heksadesimal form.
- b) Tallet $b = ABC_{16}$ er gitt på heksadesimal form. Finn b på oktal form
- c) Tallet $c = 101101_2$ er gitt på binær form. Finn c på desimal form.

Oppgave 9

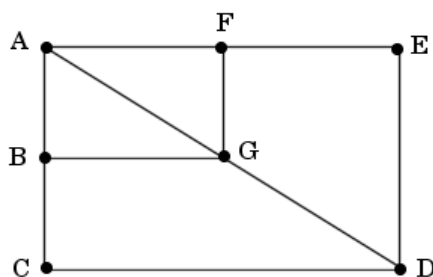
La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og R relasjonen på A gitt ved

$$R = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4), (4,1)\}.$$

- a) Tegn grafen G_R og sett opp matrisen M_R til relasjonen R . Er R transitiv?
- b) Sett opp alle tallpar (a,b) slik at det går en vei med lengde 2 fra a til b .
- c) Finn det logiske matriseproduktet $M_R \odot M_R$.

Oppgave 10

Følgende figur inneholder en graf med 7 punkter, dvs. A, B, C, D, E, F og G .



- a) Finn graden til hvert av de 7 punktene i grafen.
- b) Har grafen en lukket Euler-vei? Har grafen en ikke-lukket Euler-vei?
- c) Er det mulig å utvide grafen med kun én ekstra kant slik at den da får en ikke-lukket Euler-vei? Sett i så fall opp denne veien.

Definisjoner og formeler

Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \quad p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x) \quad \neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

Noen mengdeidentiteter:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Kardinalitet – antallet elementer i en union:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Funksjoner:

I funksjonen $f : A \rightarrow B$ betyr A definisjonsmengde og B verdiområde. En funksjon $f : A \rightarrow B$ er en-til-en hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon $f : A \rightarrow B$ er på hvis $\forall (b \in B) \exists (a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen), div og mod:

La a være et heltall og d et positivt heltall. Da finnes entydige heltall q og r med $0 \leq r < d$ slik at $a = dq + r$. Operasjonene **div** og **mod** defineres ved at $a \text{ div } d = q$ og $a \text{ mod } d = r$.

Moduloregning:

La m være et positivt heltall. To heltall a og b kalles ekvivalente modulo m hvis m går opp i $b - a$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

Rekker:

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^n ar^k = a \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, r \neq 1$

Aritmetisk rekke: Summen av første og siste ledd ganget med antall ledd, delt med 2.

Binomialkoeffisienter:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!}, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Antall forskjellige utvalg på r stykker fra en samling på n stykker:

Ordnet uten tilbakelegging: $n(n-1) \cdots (n-r+1)$

Uordnet uten tilbakelegging: $\binom{n}{r}$

Ordnet med tilbakelegging: n^r

Uordnet med tilbakelegging: $\binom{n+r-1}{r}$

Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:

Hvis N objekter skal plasseres i k bokser, må minst én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

Differensligninger:

Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der c_1 og c_2 er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2.$$

Hvis det karakteristiske polynomiet har to forskjellige reelle løsninger r_1 og r_2 , blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomiet har kun én løsning r_0 , blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Relasjoner:

En relasjon R på en mengde A er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La R være en relasjon på en mengde A .

R er refleksiv hvis $(a, a) \in R$ for alle $a \in A$.

R er symmetrisk hvis $(a, b) \in R$, så er $(b, a) \in R$.

R er antisymmetrisk hvis $a \neq b$ og $(a, b) \in R$, så er $(b, a) \notin R$.

R er transitiv hvis $(a, b) \in R$ og $(b, c) \in R$, så er $(a, c) \in R$.

R er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

R er en delvis ordning hvis den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

Grafteori:

Graden til et punkt i en urettet graf er antallet kanter knyttet til punktet.

Eulers setning:

En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en lukket Euler-vei (en Euler-sykel) hvis og bare hvis alle punktene i grafen har partallsgrad. En sammenhengende urettet graf har en (ikke-lukket) Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to punkter i grafen har oddetallsgrad.