

EKSAMEN I DISKRET MATEMATIKK FEBRUAR 2009 LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a)

$$r \equiv p \wedge \neg q, \quad s \equiv \neg p \rightarrow \neg q \equiv q \rightarrow p$$

$$t \equiv q \rightarrow \neg p, \quad \neg r \equiv \neg(p \wedge \neg q) \equiv \neg p \vee q,$$

$$s \wedge t \equiv (q \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow \neg p) \equiv (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg p) \\ \equiv \neg q \wedge (p \vee \neg p) \equiv \neg q \wedge s \equiv \neg q$$

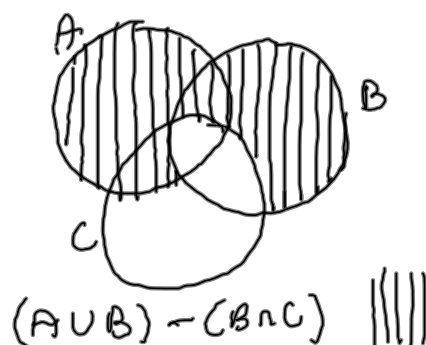
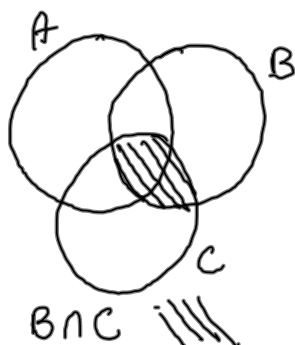
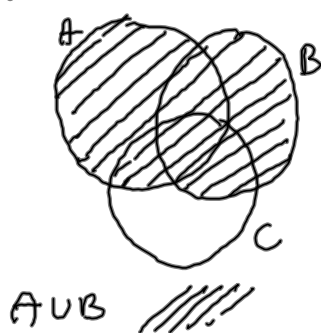
b)

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
S	S	S	S	S	S	S
S	S	V	S	V	V	V
S	V	S	V	S	S	S
S	V	V	V	S	S	S
V	S	S	S	S	S	S
V	S	V	S	V	V	S
V	V	S	S	S	S	S
V	V	V	S	S	V	S

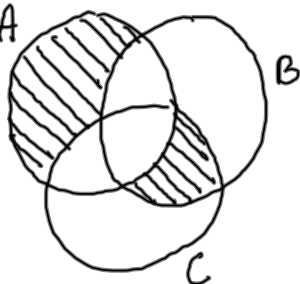
Vi ser at $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ og $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ ikke er ekvivalente

Oppgave 2

a)



b)



kan for eksempel skrives som

$$[A - (B \cup C)] \cup [(B \cap C) - A]$$

Oppgave 3

- a) En bitskema med længde 8 kan ha fra 0 til 8 1-biter. Det betyder at værdimængden til f er $\{0, 1, \dots, 8\}$.
Hvis f.eks. $a = 10000000$ og $b = 01000000$, så er $f(a) = f(b) = 1$ siden begge har én 1-bit. Dermed er f ikke en-til-en. f er ikke på siden $\{0, 1, \dots, 8\} \neq \mathbb{N}$.

- b) A_k er antallet bitsekvenser som har k 1-biter.

Vi kan velge k plasser for 1-biter blant de 8 plassene på $\binom{8}{k}$ forskjellige måter. Antallet forskjellige

bitsekvenser med k biter er derfor like $\binom{8}{k}$. Dermed

$$|A_0| = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \quad |A_1| = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 8, \quad |A_2| = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28,$$

$$|A_3| = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56, \quad |A_4| = \binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

c)

Handwritten Pascal's Triangle showing the first 10 rows. The numbers are arranged in a triangular shape, with each number being the sum of the two numbers directly above it. The rows are:

- Row 0: 1
- Row 1: 1, 1
- Row 2: 1, 2, 1
- Row 3: 1, 3, 3, 1
- Row 4: 1, 4, 6, 4, 1
- Row 5: 1, 5, 10, 10, 5, 1
- Row 6: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1
- Row 7: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1
- Row 8: 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1
- Row 9: 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1

Oppgave 4

- a)
- | | |
|-----|---|
| 523 | 2 |
| 261 | 1 |
| 130 | 1 |
| 65 | 0 |
| 32 | 1 |
| 16 | 0 |
| 8 | 0 |
| 4 | 0 |
| 2 | 0 |
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

$$523_{10} = \underbrace{1000}_2 \underbrace{0010}_0 \underbrace{1011}_B \underbrace{}_2$$

$$= 1013_8 = 20B_{16}$$

b) $517 = 11 \cdot 47$

c) Vi har $436_g = 4g^2 + 3g + 6 = 523$. Løser vi 2. gradsligningen $4g^2 + 3g - 517 = 0$ får vi $g = 11$ eller $g = -47/4$. Kun $g = 11$ gir mening her.

Vi kan også tenke slik: 6 er siste siffer i 436_g .

Dermed må $523 \bmod g = 6$. Det betyr at g må gå opp i $523 - 6 = 517$. Fra b) har vi at da må g være 11 eller 47. Men 47 er for stort. Dermed $g = 11$.

Vi kan også sette prøve på svaret:

$$\begin{array}{r|l} 523 & 11 \\ \hline 47 & 6 \\ 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{array}$$

Oppgave 5

a) Et matriseprodukt er definert når antall kolonner i den første matrisen er lik antallet rader i den andre.

A er en 2×3 -matrise, B en 3×2 -matrise og C en 3×3 -matrise.

Dermed er AB, BA, AC og CB definert. Produktene CA og BC er ikke definert.

AB blir en 2×2 -matrise, BA en 3×3 -matrise, AC en 2×3 -matrise og CB en 3×2 -matrise.

b)

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \overset{B}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \overset{B}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 6

- a) Det generelle leddet er $3+7k$ der $k=0,1,\dots,13$.
Rekken har 14 ledd. Dermed blir summen lik

$$(3+94)14/2 = 679$$

b)
$$\sum_{k=0}^4 2(-3)^k = 2 \frac{(-3)^5 - 1}{-3 - 1} = 122$$

c) $s_1 = H_1 = 1$ og $t_1 = (1+1)(H_2-1) = 2(1+\frac{1}{2}-1) = 1$
 $s_2 = H_1 + H_2 = 1 + 1 + \frac{1}{2} = 5/2$, $t_2 = (2+1)(H_3-1) = 3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-1) = \frac{5}{2}$.

Induksjonsbevis:

1) Basisfallet er oppfylt siden $s_1 = t_1$.

2) Anta at $s_k = t_k$, dvs. $H_1 + H_2 + \dots + H_k = (k+1)(H_{k+1}-1)$.

$$\begin{aligned} \text{Vi har } s_{k+1} &= s_k + H_{k+1} = (k+1)(H_{k+1}-1) + H_{k+1} \\ &= (k+2)H_{k+1} - (k+1). \end{aligned}$$

Vi har $H_{k+2} = H_{k+1} + \frac{1}{k+2}$. Dermed blir

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= (k+2)(H_{k+2}-1) = (k+2)(H_{k+1} + \frac{1}{k+2} - 1) \\ &= (k+2)H_{k+1} + 1 - (k+2) = (k+2)H_{k+1} - (k+1) \end{aligned}$$

Vi ser at $s_{k+1} = t_{k+1}$.

Induksjonsprinsippet gir at $s_n = t_n$ for alle $n \geq 1$.

Oppgave 7

a) Hvis 1 står først, kan de øvrige ballene permuteres på $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ måter.

b) Hvis 1 står først og 3 på midten, kan de 3 øvrige ballene permuteres på $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ måter.

- c) La A være de permutasjonene der 1 står først, B de der 3 står på midten og C de der 5 står bakerst. Antallet der 1 står først eller 3 på midten eller 5 bakerst, blir dermed antallet i mengden $A \cup B \cup C$.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 24 + 24 + 24 - 6 - 6 - 6 + 2 = 56.$$

Oppgave 8

a) $a_0 = 2, a_1 = 6, a_2 = 4a_1 - 4a_0 = 16, a_3 = 4a_2 - 4a_1 = 40, a_4 = 4a_3 - 4a_2 = 96$

- b) Det karakteristiske polynomiet blir $x^2 = 4x - 4$ eller $x^2 - 4x + 4 = 0$. Polynomiet har kun en løsning $x_0 = 2$. Generell løsning for differensligningen blir da:

$$a_n = \alpha 2^n + \beta n 2^n$$

$$a_0 = \alpha = 2$$

$$a_1 = 2\alpha + 2\beta = 6$$

Dermed $\alpha = 2$ og $\beta = 1$. Løsningen blir

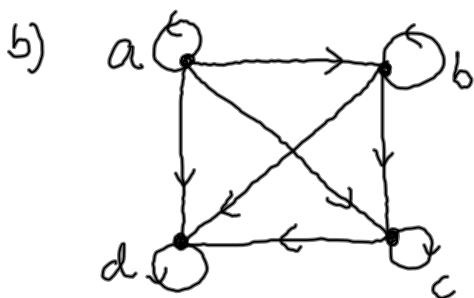
$$a_n = 2 \cdot 2^n + n \cdot 2^n = (n+2)2^n$$

b) $a_{10} = (10+2) \cdot 2^{10} = 12 \cdot 1024 = 12288$

Oppgave 9

a)

$$R = \{ (a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (b,c), (b,d), (c,c), (c,d), (d,d) \}$$



c) R er refleksiv siden alle alle diagonalelementene i M_R er 1-ere.

R er antisymmetrisk fordi det aldri går på begge veier mellom to forskjellige punkter.

Vi ser også at den er transitiv.

R er derfor en partiell ordning.

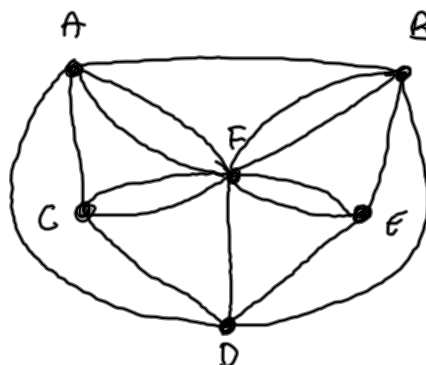
d) Vi kan finne dette ved f.eks. å regne ut $M_R \odot M_R \odot M_R$.

Vi har at $M_R \odot M_R = M_R$ og dermed at $M_R \odot M_R \odot M_R = M_R$.

Med andre ord får vi de samme parene som i R .

Oppgave 10

a)



b)

$$\text{grad}(A) = 5$$

$$\text{grad}(B) = 5$$

$$\text{grad}(C) = 4$$

$$\text{grad}(D) = 5$$

$$\text{grad}(E) = 4$$

$$\text{grad}(F) = 9$$

c) Svaret er nei! Hvis det skulle være mulig måtte det finnes en Eulervei. Men det gjør det ikke siden fire av punktene har odde grad.