

AVDELING FOR INGENIØRUTDANNING

EKSAMENSOPPGAVE

Emne: Diskret matematikk		Emnekode: FO 019A	Fagansvarlig: Ulf Uttersrud
Gruppe(r):		Dato: 16.02.2009	Eksamenstid: 9 – 14
Eksamensoppgaven består av:	Antall sider (inkl. forsiden): 5	Antall oppgaver: 10	Antall vedlegg: 0
Tillatte hjelpemidler:	Alle trykte og skrevne hjelpemidler samt håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst		
Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig. Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.			

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Studieleders/ Fagkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Studieleder/ Fagkoordinator	
Ulf Uttersrud				

Alle de 10 oppgavene teller likt. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave.

Alle svar skal begrunnes! Det kan for eksempel skje ved at du tar med mellomregninger eller gir andre former for argumentasjon. Kun et svar uten noen begrunnelse er normalt verdiløst.

Oppgave 1

- a) Utsagnene p , q , r , s og t er gitt ved

p : «Jeg er tørst»

q : «Glasset er tomt»

r : «Jeg er tørst og glasset er ikke tomt»

s : «Hvis jeg ikke er tørst, så er glasset ikke tomt»

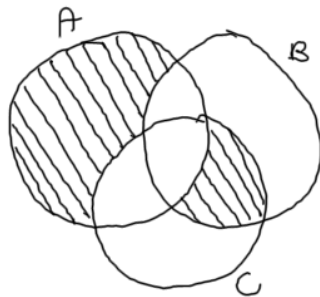
t : «Glasset er tomt bare hvis jeg ikke er tørst»

Skriv de sammensatte utsagnene r , s , t , $\neg r$ og $s \wedge t$ ved hjelp av p , q og logiske operatorer. Skriv dem på så enkel form som mulig, dvs. ved færrest mulig logiske operatorer.

- b) La p , q og r være vilkårlige logiske utsagn. Avgjør om de to sammensatte utsagnene $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ og $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ er ekvivalente eller ikke. Svaret skal begrunnes.

Oppgave 2

- a) La A , B og C være vilkårlige mengder. Lag et Venn-diagram der du skraverer mengden $(A \cup B) - (B \cap C)$.
- b) Finn (og uttrykk ved hjelp av A , B , C og mengdeoperasjoner) den mengden som svarer til den skraverte delen av Venn-diagrammet under:



Oppgave 3

La A være mengden av alle bitsekvenser (eng: bit strings) med lengde 8. For eksempel er 01011001 og 11110000 to slike bitsekvenser. La N være de naturlige tallene, dvs. $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

- La funksjonen $f : A \rightarrow N$ være definert ved at $f(a)$ for hver $a \in A$ er lik antallet 1-biter i bitsekvensen a . Finn verdimengden til f ? Er f en-til-en? Er f på? Begrunn svarene.
- La $A_k = \{a \in A \mid f(a) = k\}$. Finn antallet elementer i mengden A_k for hver $k = 0, 1, 2, 3, 4$, dvs. finn $|A_k|$ for $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
- Skriv opp de åtte første radene i Pascals trekant. Husk at første (øverste rad) kun består av tallet 1.

Oppgave 4

- Gitt tallet 523_{10} . Finn tallet på binær, oktal og heksadesimal form.
- Finn primtallsfaktoriseringen til 517_{10} .
- Tallsystemer med 2, 8, 10 eller 16 som grunntall er i vanlig bruk. Men et hvilket som helst positivt heltall g kan være grunntall i et tallsystem. Finn det positive heltallet g som er slik at sifrene til 523_{10} i tallsystemet med g som grunntall blir 436, dvs. $523_{10} = 436_g$.

Oppgave 5

Gitt matrisene $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- For at et matriseprodukt skal være definert stilles det bestemte krav til dimensjonene til de to matrisene i produktet. Avgjør hvilke av disse matriseproduktene som er definert: AB , BA , AC , CA , BC , CB . Sett opp hvilke dimensjon produktet får for de matriseproduktene som er definert.
- Regn ut matriseproduktene AB og BA .

Oppgave 6

- Finn summen av den aritmetiske rekken $3 + 10 + 17 + 24 + \dots + 87 + 94$.
- Finn summen $\sum_{k=0}^4 2(-3)^k = 2 + 2(-3) + 2(-3)^2 + 2(-3)^3 + 2(-3)^4$ ved å bruke formelen for summen av en geometrisk rekke.
- Det n -te harmoniske tallet H_n er gitt ved $H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$. La $s_n = H_1 + H_2 + H_3 + \dots + H_n$ og $t_n = (n+1)(H_{n+1} - 1)$. Vis at $s_n = t_n$ for $n = 1$ og $n = 2$. Vis ved induksjon at $s_n = t_n$ for alle $n \geq 1$.

Oppgave 7

Her skal vi se på permutasjoner av tallene 1, 2, 3, 4, 5.

- a) Hvor mange permutasjoner har tallet 1 først?
- b) Hvor mange permutasjoner har 1 først og 3 på midten?
- c) Hvor mange permutasjoner har 1 først eller 3 på midten eller 5 bakerst?

Oppgave 8

Gitt differensligningen $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $n > 1$, $a_0 = 2$, $a_1 = 6$.

- a) Finn a_2 , a_3 og a_4 .
- b) Finn en formel for a_n .
- c) Finn a_{10} ved å sette inn i formelen for a_n .

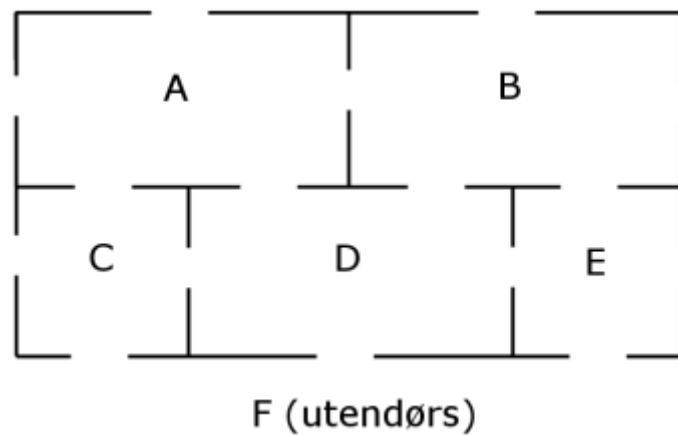
Oppgave 9

Matrisen M_R nedenfor er matrisen til en relasjon R på mengden $A = \{a, b, c, d\}$.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) Sett opp R som en mengde av par av elementer fra A .
- b) Tegn grafen til R .
- c) Er R en partiell ordning?
- d) Finn alle par (x, y) av elementer fra A slik at det går en vei i grafen til R fra x til y med lengde 3.

Oppgave 10



Figuren over viser rommene i et hus. Det er fem rom med navn A, B, C, D og E. I hvert rom er det et antall dører (markert på figuren med åpninger). For eksempel er det fem dører i rom A. Noen dører går ut av huset (til F) og noen går til andre rom. For eksempel er det to dører fra A til F og videre en dør fra A til hvert av rommene B, C og D.

- La hvert av rommene (A, B, C, D, E) og utendørs (F) være punkter i en graf med dørene som kanter mellom punktene. Tegn grafen.
- Sett opp graden til hvert av de seks punktene i grafen.
- Er det mulig å starte i et av rommene eller eventuelt utendørs og så gå gjennom hver dør nøyaktig én gang?