Eksamen Diskret matematikk 18. februar 2008

Oppgave 1

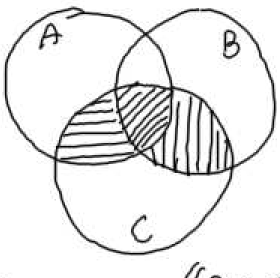
a) i) $p \wedge q$ ii) $\neg p \vee \neg q$ iii) $p \rightarrow q$ iv) $q \rightarrow p$

b)

p	q	r	$p \vee q$	$\neg r$	$p \wedge \neg r$	$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge \neg r)$
S	S	S	S	U	U	U
S	S	U	S	S	S	S
S	U	S	S	U	U	U
S	U	U	S	S	S	S
U	S	S	S	U	U	U
U	S	U	S	S	U	U
U	U	S	U	U	U	S
U	U	U	U	S	U	S

Oppgave 2

a)



$(A \cap C) - B$ ≡

$(B \cap C) - A$ |||||

$A \cap B \cap C$ ////

Det som er skravert kan skrives som $(A \cup B) \cap C$.

Dermed $((A \cap C) - B) \cup (A \cap B \cap C) \cup ((B \cap C) - A) = (A \cup B) \cap C$

b) $A \cap B = \{a, c\}$, $A - C = \{a, c\}$, $B - C = \{a, c\}$

Oppgave 3

a) $f(7) = 7 \bmod 13 = 7$, $f(13) = 13 \bmod 13 = 0$, $f(26) = 26 \bmod 13 = 0$
$g(7) = 7 \operatorname{div} 13 = 0$, $g(13) = 13 \operatorname{div} 13 = 1$, $g(26) = 26 \operatorname{div} 13 = 2$

b) Verdimengden til f er $\{0, 1, 2, \dots, 12\}$ og verdimengden til g er $\{0, 1, 2, \dots\dots\}$.

c) $f(13) = f(26) = 0$, dvs. f er ikke en-til-en.
$g(0) = g(7) = 0$, dvs. g er ikke en-til-en.
f er ikke på siden verdimengden til f er mindre enn A.
g er på siden verdimengden til g er hele A.

Oppgave 4

$$A+B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A-B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad CB = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 5

$$|M| = 3^4 = 81, \quad |M_k| = \binom{4}{k} 2^{4-k}$$

$$|M_0| = \binom{4}{0} 2^4 = 16, \quad |M_1| = \binom{4}{1} 2^3 = 32, \quad |M_2| = \binom{4}{2} 2^2 = 24,$$

$$|M_3| = \binom{4}{3} 2^1 = 8, \quad |M_4| = \binom{4}{4} 2^0 = 1.$$

Test: $16 + 32 + 24 + 8 + 1 = 81$

Oppgave 6

a) $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21, \quad \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

b) $2^7 = 128$

c) Halvparten av bitsekvensene må være av denne typen, dvs. 64 stykker.

Oppgave 7

a) $1835_{10} = 11100101011_2$ b) $1234_8 = 1010011100_2$

c) $101010101010_2 = AAA_{16}$ siden $1010 = A$.

$AAA_{16} = 10 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16 + 10 = 2560 + 160 + 10 = 2730_{10}$

Oppgave 8

a) $a_2 = 5a_1 - 6a_0 = 60 - 30 = 30$, $a_3 = 5a_2 - 6a_1 = 150 - 72 = 78$

$a_4 = 5a_3 - 6a_2 = 390 - 180 = 210$

Karakteristisk polynom: $r^2 = 5r - 6$, $r^2 - 5r + 6 = 0$.

Røtter: $r_1 = 3$ og $r_2 = 2$. Generell løsning:

$$a_n = \alpha 3^n + \beta 2^n$$

Dermed: $\alpha + \beta = a_0 = 5$ og $3\alpha + 2\beta = 12$. Det gir $\alpha = 2$ og $\beta = 3$. Løsning:

$$a_n = 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n$$

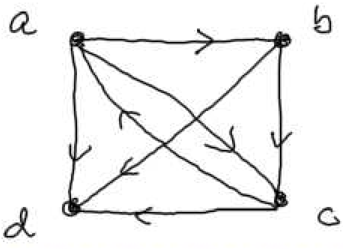
$$a_5 = 2 \cdot 3^5 + 3 \cdot 2^5 = 2 \cdot 243 + 3 \cdot 32 = 582$$

b) 1. Basistrinnet: Påstanden stemmer for $n = 0$ (som er det første partallet) siden $a_0 = 5$.

2. Induksjonstrinnet: Anta at påstanden stemmer for et partall $k \geq 0$, dvs. at 5 går opp i a_k. Neste partall er $k+2$, $a_{k+2} = 5a_{k+1} - 6a_k$. Vi ser at 5 går opp i både $5a_{k+1}$ og i $6a_k$ og dermed i a_{k+2}. Induksjonsprinsippet sier dermed at 5 går opp i a_n for alle partall $n \geq 0$.

Oppgave 9

a) Grafen til R



Matrisen til R

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)
$$M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R \odot M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Her kan vi finne svaret enten ved å studere grafen eller å bruke matrisen $M_R \odot M_R \odot M_R$. Vi får flg. par: (a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (b,c), (b,d), (c,a), (c,c) og (c,d).

Oppgave 10

a) grad(A) = 2, grad(B) = 4, grad(C) = 4, grad(D) = 4, grad(E) = 4, grad(F) = 4 og grad(G) = 2.

b) Det finnes en lukket Euler-vei siden alle punktene har partallsgrad. Hvis vi starter i A får vi f.eks. denne veien:

A – C – E – G – F – B – C – D – F – E – D – B – A