Eksamen i Diskret matematikk mandag 5. februar 2007

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

i) a) $r \wedge p \wedge \neg q$ b) $(p \wedge \neg r) \rightarrow q$

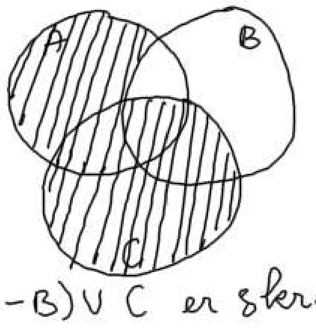
ii)

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$p \vee \neg q$	$q \vee \neg r$	$r \vee \neg p$	$(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$
S	S	S	U	U	U	S	S	S	S
S	S	U	U	U	S	S	S	U	U
S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
S	U	U	U	S	S	S	S	U	U
U	S	S	S	U	U	U	S	S	U
U	S	U	S	U	S	U	S	S	U
U	U	S	S	S	U	S	U	S	U
U	U	U	S	S	S	S	S	S	S

Vi ser at det sammensatte utsagnet $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$ er sant enten når p, q og r alle er sanne eller når p, q og r alle er usanne.

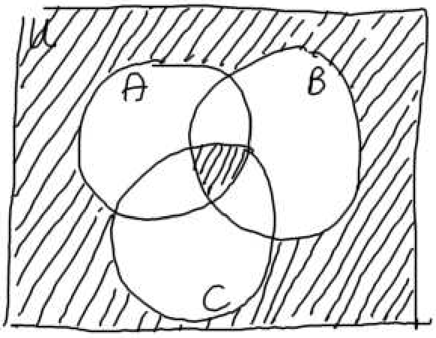
Oppgave 2

i)



$(A - B) \cup C$ er skravert

ii)



$(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ er skravert.

OBS I Oppgave 1 ii) inngår logiske utsagn, mens det her i 2 ii) brukes mengder. Hvis vi gjør om 1 ii) til mengder, får vi at mengdene

$(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ og $(A \cup \overline{B}) \cap (B \cup \overline{C}) \cap (C \cup \overline{A})$ er like.

Oppgave 3

i) A er mengden av alle bitsekvenser av lengde 8. Det finnes $2^8 = 256$ forskjellige bitsekvenser av lengde 8. Dermed $|A| = 256$.

ii) Mulige funksjonsverdier er $8-0=8$, $7-1=6$, $6-2=4$, $5-3=2$, $4-4=0$, $3-5=-2$, $2-6=-4$, $1-7=-6$ og $0-8=-8$. Dermed blir $V=\{-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8\}$.

f er ikke en-til-en. La f.eks. $a=(0,1,1,1,1,1,1,1)$ og $b=(1,0,1,1,1,1,1,1)$. Da er $f(a)=7-1=6$ og $f(b)=7-1=6$. Men $a \neq b$. f er ikke på siden $V \neq Z$.

iii) $X_0 = \{a \in A \mid f(a)=0\}$, dvs. X_0 er mengden av de bitsekvensene av lengde 8 som har like mange 1-biter og 0-biter. Da må det være 4 1-biter og 4 0-biter. De 4 1-bitene kan plasseres på $\binom{8}{4} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2} = 70$ forskjellige måter. Dermed $|X_0| = 70$.

Mengden X_1 er tom fordi det finnes ingen bitsekvens a der $f(a)=1$ siden 1 ikke er i verdimengden V.

Mengden X_2 er mengden av de bitsekvensene av lengde 8 som har 5 1-biter og 3 0-biter. Dermed blir

$$|X_2| = \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2} = 56.$$

Oppgave 4

i) Ved kun å bruke lodd på 5 kg kan vi få flg. sammenlagte vekter: $0, 5, 10, 15, 20, 25, \dots$.
Ved kun å bruke lodd på 7 kg kan vi få flg. sammenlagte vekter: $0, 7, 14, 21, 28, \dots$.

En sammenlagt vekt på 35 kg kan oppnås på to forskjellige måter: 1) 7 lodd á 5 kg eller 2) 5 lodd á 7 kg.

ii) Vi kan få 22 kg ved å bruke 3 lodd á 5 kg og et lodd á 7 kg ($3 \cdot 5 + 7 = 22$). Vi kan få 24 kg ved å bruke 2 lodd á 5 kg og 2 lodd á 7 kg ($2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 24$). Vi ser fort at det ikke er mulig å få til 23 kg.

iii) La $P(n)$ bety at vi kan få en sammenlagt vekt på n kg ved å legge sammen lodd på 5 og 7 kg.

1) $P(24)$ er sann, dvs. $P(n)$ sann for $n = 24$.

2) Anta at $P(k)$, $k \geq 24$ er sann, dvs. det finnes hele ikke-negative tall a og b slik at

$$k = 5a + 7b$$

Hvis $b \geq 2$, får vi $k+1 = 5a + 7(b-2+2) + 1$
$= 5a + 7(b-2) + 15 = 5(a+3) + 7(b-2)$.
Dermed kan en vekt på $k+1$ oppnås med $a+3$ lodd á 5 kg og $b-2$ lodd á 7 kg.
Hvis $b < 2$, må $a \geq 4$ siden $5a + 7b \geq 24$.
Dermed $k+1 = 5(a-4+4) + 7b + 1 = 5(a-4) + 7b + 21$

$= 5(a-4) + 7(b+3)$. I dette tilfellet får vi en vekt på $k+1$ kg ved å bruke $a-4$ lodd á 5 kg og $b+3$ lodd á 7 kg.

Vi har dermed vist at hvis $P(k)$ er sann, $k \geq 24$, så er $P(k+1)$ sann. Induksjonsprinsippet gir da at $P(n)$ er sann for alle $n \geq 24$.

Oppgave 5

i)

8	3	0	1	1
579	72	9	1	0

$579_{10} = 1103_8$

ii) $1234_8 = \overbrace{001}^{1}\overbrace{010}^{2}\overbrace{011}^{3}\overbrace{100}^{4}{}_2 = \overbrace{0010}^{2}\,\overbrace{1001}^{9}\,\overbrace{1100}^{C}{}_2 = 29C_{16}$

$= (2 \cdot 16^2 + 9 \cdot 16 + 12)_{10} = (512 + 144 + 12)_{10} = 668_{10}$.

iii)

$$\begin{array}{rr} & {\scriptstyle 1\,1\,1} \\ c = & 10110110_2 \\ d = & 1011001_2 \\ \hline c+d = & 100001111 \end{array}$$

Oppgave 6

i) $2+4+6+\cdots+2n = 2(1+2+3+\cdots+n)$
$= 2\,\dfrac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$.

$2+4+6+\cdots+200 = 100 \cdot 101 = 10100$.

ii) Når $i = 0$ vil j gå fra 0 til 0, dvs. 1 gang.
Når $i = 1$ vil j gå fra 1 til 0, dvs 2 ganger
⋮
Når $i = 99$ vil j gå fra 99 til 0, dvs. 100 ganger.
Hver gang økes sum med 1. Dermed vil
sum $= 1+2+\cdots+100 = 5050$. Utskriften blir 5050.

Oppgave 7

i) $A+B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 1+1 \\ 1+1 & 0+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$A-B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 1-1 \\ 1-1 & 0-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$2A-3B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 2-3 \\ 2-3 & 0-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

ii) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$AC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 0 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 2 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 2 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

iii) a) $\forall A \forall B\, P(A,B)$ er usant fordi det ikke er sant at $AB = BA$ for alle A og B. La B være som C i ii). Da blir $AB \neq BA$.

b) $\forall A \exists B\, P(A,B)$ er sant. Vi kan la $B = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Da vil $AI = IA$ for alle A.

c) $\exists A \forall B\, P(A,B)$ er sant. La $A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Da vil $IB = BI$ for alle B.

d) $\exists A \exists B\, P(A,B)$ er sant. La f.eks (se ii)

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Da er $AB = BA$.

Oppgave 8

i) $\sum_{k=0}^{n} 3^k = 1+3+3^2+\cdots+3^n = \frac{3^{n+1}-1}{3-1} = \frac{1}{2}(3^{n+1}-1).$

ii) $a_1 = a_0 + 3^1 = 1+3 = 4$

$a_2 = a_1 + 3^2 = 4+9 = 13$

$a_3 = a_2 + 3^3 = 13+27 = 40$

$a_4 = a_3 + 3^4 = 40+81 = 121$

iii) $a_n = s\,a_{n-1} + t\,a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$

$a_2 = s a_1 + t a_0 = 4s + t = 13$

$a_3 = s a_2 + t a_1 = 13s + 4t = 40$

Vi må finne s og t av ligningene:

$$4s + t = 13$$
$$13s + 4t = 40$$

$t = 13 - 4s$, $13s + 4(13-4s) = 40$, $-3s = -12$,
$s = 4$ og dermed $t = -3$.

Differensligningen blir derfor $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$.
Karakteristiske polynom: $r^2 = 4r - 3$. Røttene blir $r_1 = 3$ og $r_2 = 1$.

Generell løsning: $a_n = \alpha\, 3^n + \beta\, 1^n = \alpha\, 3^n + \beta$.

$a_0 = \alpha + \beta = 1$, $a_1 = 3\alpha + \beta = 4$

Det $\alpha = \frac{3}{2}$ og $\beta = -\frac{1}{2}$. Dermed

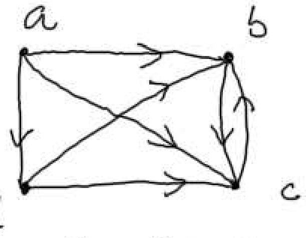
$$a_n = \frac{3}{2}\, 3^n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1).$$

$a_5 = \frac{1}{2}(3^6 - 1) = \frac{1}{2}(729-1) = 364.$

Oppgave 9

i) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ii)



iii) $$M \odot M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

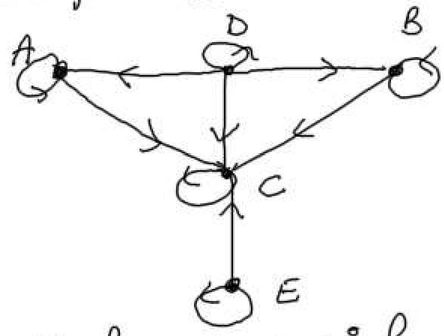
Det er 6 1-ere i $M \odot M$. Dermed er det 6 veier med lengde 2.

Oppgave 10

i) $C = A \cup B = \{a, b, c, d\}$, $D = A \cap B = \{b, c\}$,
$E = (A - B) \cup (B - A) = \{a, d\}$.

ii) $A \subseteq A$, $A \subseteq C$, $B \subseteq B$, $B \subseteq C$, $C \subseteq C$, $D \subseteq D$, $D \subseteq A$,
$D \subseteq B$, $D \subseteq C$, $E \subseteq E$, $E \subseteq C$.

$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



a) R er refleksiv siden M har 1-ere på hoveddiagonalen

b) R er antisymmetrisk. Det er ingen piler begge veier mellom to noder i grafen.

c) R er transitiv. Det gjelder generelt for mengder. Hvis $X \subseteq Y$ og $Y \subseteq Z$, så er $X \subseteq Z$.

R er dermed en partiell ordning.