

AVDELING FOR INGENIØRUTDANNING

EKSAMENSOPPGAVE

Emne: Diskret matematikk		Emnekode: FO 019A	Fagansvarlig: Ulf Uttersrud
Gruppe(r):		Dato: 05.02.2007	Eksamenstid: 9 - 14
Eksamensoppgaven består av:	Antall sider (inkl. forsiden): 5	Antall oppgaver: 10	Antall vedlegg: 0
Tillatte hjelpemidler:	Alle trykte og skrevne hjelpemidler samt håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst		
Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig. Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.			

Utarbeidet av (faglærer): Ulf Uttersrud	Kontrollert av (en av disse):			Studieleders/ Fagkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Studieleder/ Fagkoordinator	

Alle oppgaver teller likt. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave.

Alle svar skal begrunnes! For eksempel ved å ta med mellomregninger eller ved å gi annen form for argumentasjon.

Oppgave 1

- i) Utsagnene p , q og r er gitt ved p : *Det snør*, q : *Det er kuldegrader* og r : *Det blåser*. Skriv utsagnene ”*Det blåser og snør, men det er ikke kuldegrader*” og ”*Hvis det snør og er vindstille, så er det kuldegrader*” ved hjelp av p , q , r og logiske operatorer.
- ii) La nå p , q og r være vilkårlige logiske utsagn. Bruk en sannhetsverditabell til å avgjøre for hvilke verdier av p , q og r det sammensatte utsagnet $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$ er sant.

Oppgave 2

La A , B og C være tre vilkårlige delmengder i en universalmengde U .

- i) Tegn et Venn-diagram og skravér mengden $(A - B) \cup C$.
- ii) Tegn et Venn-diagram og skravér mengden $(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$.

Oppgave 3

La A være mengden av alle bitsekvenser av lengde 8 og Z de hele tallene, dvs.
 $Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$. La funksjonen $f : A \rightarrow Z$ være definert ved at for hver $a \in A$ er $f(a)$ lik differansen mellom antall 1-biter og antall 0-biter i bitsekvensen a . Hvis f.eks. $a = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$ er $f(a) = 3 - 5 = -2$ og hvis $a = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$ er $f(a) = 6 - 2 = 4$.

- i) Hva blir $|A|$, dvs. hvor mange elementer har A ?
- ii) Finn verdimengden V til f . Er f en til en? Er f på? Begrunn svarene!
- iii) La mengden $X_n = \{a \in A \mid f(a) = n\}$. Finn $|X_0|$, $|X_1|$ og $|X_2|$.

Oppgave 4

Anta at vi har lodd på 5 kg og 7 kg. Hvis vi for eksempel tar to lodd på 5 kg og et lodd på 7 kg, blir den sammenlagte vekten 17 kg. Hvis vi tar tre lodd på 7 kg lodd og ingen lodd på 5 kg, blir vekten til sammen 21 kg.

- i) Hvilke sammenlagte vekter kan vi få til ved å bruke kun lodd på 5 kg? Hva hvis vi kun kan bruke lodd på 7 kg? Er det noen sammenlagt vekt vi kan få til på flere enn én måte ved å legge sammen lodd på 5 og 7 kg?
- ii) Er det mulig å få en sammenlagt vekt på 22 kg ved å legge sammen lodd på 5 og 7 kg? Hva med en sammenlagt vekt på 23 kg? Hva med 24 kg? Begrunn svarene!
- iii) La n være et vilkårlig heltall større enn eller lik 24. Det er mulig å få en sammenlagt vekt på n kg ved å legge sammen lodd på 5 og 7 kg? Vis dette for eksempel ved hjelp av induksjon på n .

Oppgave 5

- i) Tallet $a = 579_{10}$ er gitt på desimal form. Finn tallet på oktal form. Begrunn svaret!
- ii) Tallet $b = 1234_8$ er gitt på oktal form. Finn tallet på binær form, på heksadesimal form og på desimal form. Begrunn svarene!
- iii) Tallene $c = 10110110_2$ og $d = 1011001_2$ er gitt på binær form. Finn summen $c + d$ på binær form og da helst ved å bruke binær addisjon. Begrunn svaret!

Oppgave 6

- i) Finn en formel for summen av de n første positive partallene, dvs. finn en formel for summen $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$. Bruk formelen til å finne summen av de 100 første positive partallene.
- ii) Hva blir utskriften hvis flg. programbit kjøres:

```
int sum = 0;

for (int i = 0; i < 100; i++)
{
    for (int j = i; j >= 0; j--) sum++;
}

System.out.println(sum);
```

Oppgave 7

Gitt tallmatrisene $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- i) Finn matrisene $A + B$, $A - B$ og $2A - 3B$.
- ii) Finn matriseproduktene AB , BA , AC og CA .

La nå A og B være vilkårlige 2×2 – matriser der ikke alle elementene er 0. La $P(A, B)$ være utsagnet $AB = BA$.

- iii) Avgjør hvilke av følgende utsagn som er sanne: $\forall A \forall B P(A, B)$, $\forall A \exists B P(A, B)$, $\exists A \forall B P(A, B)$ og $\exists A \exists B P(A, B)$. Svarene skal begrunnes!

Oppgave 8

- i) Bruk formelen for summen av en geometrisk rekke til å finne en formel for summen $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = \sum_{k=0}^n 3^k$.
- ii) Gitt differensligningen $a_n = a_{n-1} + 3^n$, $a_0 = 1$. Finn a_1 , a_2 , a_3 og a_4 .
- iii) De verdiene du finner i punkt ii) vil være leddene i en følge som passer inn i en differensligning av formen $a_n = s a_{n-1} + t a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ der s og t er to tallkonstanter. Finn s og t . Bruk så det til å finne en formel for a_n . Finn til slutt a_5 ved å sette inn i formelen.

Oppgave 9

Mengden A er gitt ved $A = \{a, b, c, d\}$. La R være relasjonen på A gitt ved $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (c, b), (d, c), (d, b)\}$.

- i) Finn matrisen M til relasjonen R .
- ii) Finn grafen til relasjonen R .
- iii) Finn det logiske matriseproduktet $M \odot M$. Hvor mange veier med lengde 2 er det i grafen til R . Begrunn svaret!

Oppgave 10

Gitt mengdene $A = \{a, b, c\}$ og $B = \{b, c, d\}$.

i) Finn mengdene $C = A \cup B$, $D = A \cap B$ og $E = (A - B) \cup (B - A)$.

La X være den mengden som har mengdene A , B , C , D og E over som elementer, dvs. $X = \{A, B, C, D, E\}$. Husk at elementene i en mengde kan selv være mengder. Vi definerer en relasjon R på X ved at for hvert par av elementer U , V i X er U relatert til V (dvs. $U R V$) hvis og bare hvis $U \subseteq V$.

ii) Finn matrisen og grafen til R . Er R en partiell ordning? Begrunn svaret!