

Diskret matematikk - eksamen 24. feb. 2006

Oppgave 1

a) $p \wedge \neg q$ b) $\neg p \wedge \neg q$ c) $q \rightarrow \neg p$ d) $\neg(p \wedge q)$

Oppgave 2

a) Sammhetsverditabell

p	q	r	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$(p \vee q) \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	U	S	U	U	U	U
S	U	S	S	S	S	S	S
S	U	U	S	U	S	U	U
U	S	S	S	S	S	S	S
U	S	U	S	S	U	U	U
U	U	S	U	S	S	S	S
U	U	U	U	S	S	S	S

Vi ser at kolonnene for $(p \vee q) \rightarrow r$ og $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ er like.
Dermed er de to utsagnene ekvivalente.

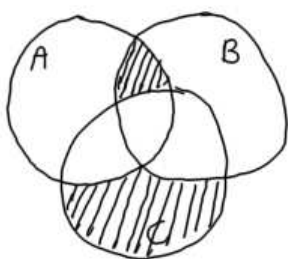
b) Bevis ved bruk av regler for logiske operasjoner.

Husk at $*) x \rightarrow y \equiv \neg x \vee y$

$$\begin{aligned} & (p \vee q) \rightarrow r \\ \equiv & \neg(p \vee q) \vee r \quad *) \\ \equiv & (\neg p \wedge \neg q) \vee r \quad \text{de Morgans lov} \\ \equiv & (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \quad \text{distributiv lov for } \wedge \\ \equiv & (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \quad *) \end{aligned}$$

Oppgave 3

i)



ii) Dette kan skrives på mange måter. For eksempel

$$(A \oplus B) - C$$

$$\text{eller } (A \cup B) - (A \cap B) - C$$

$$\text{eller } (A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C))$$

Oppgave 4

Mengden B inneholder primtallene 2, 3, 5, 7, 11, 13 og 17.

$$f(20) = 2 \cdot 0 = 0, \quad f(11) = 1 \cdot 1 = 1, \quad f(12) = 1 \cdot 2 = 2, \dots$$

$$f(19) = 1 \cdot 9 = 9, \quad f(25) = 2 \cdot 5 = 10, \quad f(26) = 2 \cdot 6 = 12,$$

$$f(27) = 2 \cdot 7 = 14, \quad f(28) = 2 \cdot 8 = 16, \quad f(29) = 2 \cdot 9 = 18.$$

Dette betyr at V må inneholde $0, 1, 2, \dots, 9, 10, 12, 14, 16, 18$.

Tallene 11, 13, 15 og 17 kan ikke være med i V siden ingen av dem kan skrives som et produkt av to positive heltall der første faktør er mindre enn 3 og andre faktør er mindre enn 10. Dermed

$$V = \{0, 1, 2, \dots, 9, 10, 12, 14, 16, 18\}$$

Funksjonen f er ikke en-til-en siden f.eks. $f(14) = f(22) = 4$.
 f er ikke på siden $V \neq B$.

Oppgave 5

$$\text{i)} \quad m = F8F_{16} = 11111000111_2 = \underbrace{111}_7 \underbrace{110}_6 \underbrace{001}_1 \underbrace{11}_7 = 7617_8$$

$$= (15 \cdot 256 + 8 \cdot 16 + 15)_{10} = 3983_{10}$$

iii)

123	2
61	1
30	1
15	0
7	1
3	1
1	1
0	1

$$123_{10} = 1111011_2 = \underbrace{111}_7 \underbrace{1011}_{11=B}_2 = 7B_{16}$$

$$= \underbrace{1}_1 \underbrace{111}_7 \underbrace{011}_3_2 = 173_8$$

Oppgave 6

$$\text{i)} \quad a = 2 \cdot 3^4$$

$$b = 3 \cdot 3^7$$

$$\gcd(a, b) = 3$$

$$\text{ii)} \quad \begin{array}{c|c|c|c} a & b & \pi & q \\ \hline 162 & 111 & 51 & 1 \\ 111 & 51 & 9 & 2 \\ 51 & 9 & 6 & 5 \\ 9 & 6 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 2 \end{array}$$

$$\gcd(a, b) = 3$$

Oppgave 7

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^3 = A^2 A = -I \cdot A = -A, \quad A^4 = A^2 A^2 = (-I)(-I) = I$$

La $B = -A$. Da vil $AB = -A^2 = I$.

Oppgave 8

$$i) \quad S_1 = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1, \quad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$$

$$ii) \quad 2 - \frac{1+2}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = S_1, \quad 2 - \frac{2+2}{4} = 2 - 1 = 1 = S_2$$

$$2 - \frac{3+2}{8} = 2 - \frac{5}{8} = \frac{16-5}{8} = \frac{11}{8} = S_3$$

Vi ser at $P(m)$ er sann for $m=1, 2$ og 3 .

Anta at $P(m)$ er sann, dvs. $S_m = 2 - \frac{m+2}{2^m}$.

$$\begin{aligned} S_{m+1} &= S_m + \frac{m+1}{2^{m+1}} = 2 - \frac{m+2}{2^m} + \frac{m+1}{2^{m+1}} = 2 - \frac{2(n+2) - (n+1)}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{m+3}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(m+1)+2}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Vi ser at $P(m+1)$ er sann. Induksjonsprinsippet gir dermed at $P(n)$ er sann for alle $n \geq 1$.

Oppgave 9

$$i) \quad \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21, \quad \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

ii) Den ene 1-biten kan stå på 8 forskjellige steder.

Dermed blir svaret 8.

iii) De to 1-bitene kan stå på 2 av de 8 plassene. Dermed blir svaret $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$.

iv) Hvis en bitsekvens inneholder ingen eller bare én 1-bit, så er det ingen 1-biter ved siden av hverandre.

Skal det unngås at to 1-biter står ved siden av hverandre, kan en 1-bit stå foran en 0-bit (først), bak en 0-bit (sist)

eller mellom to 0-biter.

Skal vi ha to 1-biter i bitskemaene kan de to settes på $_0_0_0_0_0_0_$ $8-2+1=7$ steder. Dermed blir

det $\binom{7}{2} = 21$ muligheter. Skal vi ha tre 1-biter kan

de tre settes på $_0_0_0_0_0_$ $8-3+1=6$ steder.

Det gir $\binom{6}{3} = 20$ muligheter. Tilsvarende gir fire 1-biter

$\binom{5}{4} = 5$ muligheter. Mer enn fire 1-biter kan vi ikke ha.

Tilsammen $1+8+21+20+5 = 55$ muligheter.

Obs: Dette kan skrives som $\binom{9}{0} + \binom{8}{1} + \binom{7}{2} + \binom{6}{3} + \binom{5}{4}$.

Noen vil kanskje legge merke til at 55 er et Fibonacci-tall. La a_n være antallet bitskemaer med lengde n der det ikke står to 1-biter ved siden av hverandre. Da ser en fort

at $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = 1$ og $a_1 = 2$. Hvis vi definerer

at Fibonacci-tall nr. 1 = 1, Fibonacci-tall nr. 2 = 1, Fibonacci-tall nr. 3 = 2, osv, så ser vi at a_n blir Fibonacci-tall nr. $n+2$.

Dvs. a_8 like Fibonacci-tall nr. 10 som er lik 55.

Oppgave 10

$$a_2 = 6a_1 - 9a_0 = 6 \cdot 6 - 9 \cdot 1 = 36 - 9 = 27$$

$$a_3 = 6a_2 - 9a_1 = 6 \cdot 27 - 9 \cdot 6 = 6 \cdot (27 - 9) = 6 \cdot 18 = 108$$

Det karakteristiske polynomiet $x^2 = 6x - 9$ har keen $x=3$ som løsning. Den generelle løsningen av differenslikningen blir dermed

$$a_n = \alpha 3^n + \beta n 3^n$$

$$a_0 = \alpha = 1, a_1 = 3\alpha + 3\beta = 6, 3\beta = 3, \beta = 1.$$

$$\text{Løsning: } a_n = 3^n + n 3^n = (n+1)3^n$$

$$a_4 = 5 \cdot 3^4 = 5 \cdot 81 = 405$$

Oppgave 11

i) $A = \{500, 501, \dots, 598, 599\}$, $|A| = 100$

B: Første siffer kan være fra 1 til 9 og siste siffer fra 0 til 9. Dvs. $9 \cdot 10 = 90$ muligheter. $|B| = 90$

C: Første siffer kan være fra 1 til 9 og andre siffer fra 0 til 9. Dvs. $9 \cdot 10 = 90$ muligheter. $|C| = 90$

$A \cap B$: Både første og andre siffer lik 5. Siste siffer kan være fra 0 til 9. $|A \cap B| = 10$

$A \cap C$: Første og siste siffer lik 5. Andre siffer fra 0 til 9. $|A \cap C| = 10$

$B \cap C$: Andre og tredje siffer lik 5. Første siffer fra 1 til 9. $|B \cap C| = 9$.

$A \cap B \cap C$: Inneholder kun tallet 555. $|A \cap B \cap C| = 1$.

$$|A \cup B \cup C| = 100 + 90 + 90 - 10 - 10 - 9 + 1 = 252$$

iii) Hvis et tresifret tall ikke skal inneholde 5 som siffer, kan det være 8 tall som første siffer og 9 tall som andre og tredje siffer, dvs. $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ muligheter. Det er 900 tall med tre siffer. Dermed blir $|A \cup B \cup C| = 900 - 648 = 252$.

Oppgave 12

$$A \odot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B \odot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 13

i) $R = \{(a,b), (a,d), (b,b), (b,d), (c,a), (c,b), (d,b)\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ii) Nå har med $(a,a), (c,c)$ og (d,d) for at den skal være refleksiv.
Har (a,b) , men ikke (b,a) . Ikke symmetrisk.
Har både (b,d) og (d,b) . Ikke antisymmetrisk.
Har (d,b) og (b,d) , men ikke (d,d) . Ikke transitiv.

Oppgave 14

i)

x	y	z	x+y	$\bar{z}$	$(x+y)\bar{z}$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1 *)
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1 *)
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1 *)
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

$$(x+y)\bar{z}$$

$$= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

ii)

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{y}\bar{z}$
x	1			1
$\bar{x}$				1

$$f(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

$$= xz + \bar{y}z = (x+\bar{y})z$$