DISKRET MATEMATIKK - EKSAMEN 24. FEB. 2005

LØSNINGSFORSLAG

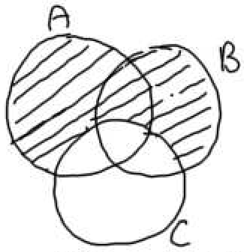
Oppgave 1

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$p \vee q$	$p \wedge \neg q$	$q \wedge \neg r$	$(p \vee q) \wedge \neg r$	$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)$
S	S	S	U	U	S	U	U	U	U
S	S	U	U	S	S	U	S	S	S
S	U	S	S	U	S	S	U	U *)	S *)
S	U	U	S	S	S	S	U	S	S
U	S	S	U	U	S	U	U	U	U
U	S	U	U	S	S	U	S	S	S
U	U	S	S	U	U	U	U	U	U
U	U	U	S	S	U	U	U	U	U

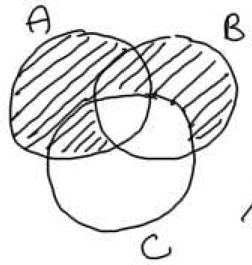
Vi ser at de to utsagnene er ulike når $p = S$, $q = U$ og $r = S$. Dermed er de to utsagnene ikke logisk ekvivalente.

Oppgave 2

i)



$//// = (A \cup B) - C$



$/// = (A - B) \cup (B - C)$

Venn-diagrammet viser at de to mengdene ikke er like.

ii) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) - A \cap B \cap C$

eller $(A \cap B - C) \cup (B \cap C - A) \cup (A \cap C - B)$

Oppgave 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix} \quad A A^T = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

Både $A^T A$ og $A A^T$ er symmetriske. Det gjelder generelt for alle matriser A.

Oppgave 4

$m = FFF_{16} = 111111111111_2 = 7777_8$

$m+1 = 1000_{16} = 1000000000000_2 = 10000_8$

Oppgave 5

$f(n) = (n \text{ div } 3) \bmod 7$

i) $f(0) = 0$, $f(40) = (40 \text{ div } 3) \bmod 7 = 13 \bmod 7 = 6$

$f(100) = (100 \text{ div } 3) \bmod 7 = 33 \bmod 7 = 5$

ii) På grunn av <u>mod 7</u> må verdimengden V_f være inneholdt i $\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Fra i) har vi at 0, 5 og 6 er i V_f. Vi ser videre at $f(3) = 1$, $f(6) = 2$, $f(9) = 3$ og $f(12) = 4$.

Dermed blir $V_f = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

Funksjonen f er ikke en-til-en siden $f(0) = 0$ og $f(1) = 0$. Den er heller ikke på siden $V_f \neq N$.

Oppgave 6

Vi ser at $a_n = 3(-2)^n$. La s_n være summen av de n første leddene, dvs.

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} 3(-2)^k$$

Dette er en geometrisk rekke med $a = 3$ og $r = -2$.

Dermed $s_n = a\frac{r^n - 1}{r-1} = 3\frac{(-2)^n - 1}{-2-1} = 1 - (-2)^n$.

$$s_{10} = 1 - (-2)^{10} = 1 - 1024 = -1023.$$

Oppgave 7

$P_n: \; 2^n + 3^n \equiv 5^n \pmod 6$

i) $2^1 + 3^1 \equiv 5^1 \pmod 6$, $5 \equiv 5 \pmod 6$ Sant!

$2^2 + 3^2 \equiv 5^2 \pmod 6$, $13 \equiv 25 \pmod 6$ Sant!

$2^3 + 3^3 \equiv 5^3 \pmod 6$, $35 \equiv 125 \pmod 6$ Sant!

ii) Anta at P_k er sann, dvs. at $2^k + 3^k \equiv 5^k \pmod 6$.

dvs. $2^k + 3^k - 5^k$ er delelig med 6.

Vi har $2^{k+1} + 3^{k+1} - 5^{k+1} = 2 \cdot 2^k + 3 \cdot 3^k - 5 \cdot 5^k$

$= 5 \cdot 2^k - 3 \cdot 2^k + 5 \cdot 3^k - 2 \cdot 3^k - 5 \cdot 5^k$

$= 5(2^k + 3^k - 5^k) - 3 \cdot 2 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3 \cdot 3^{k-1}$

Induksjonshypotesen sier at 6 går opp i $2^k + 3^k - 5^k$. Dermed går 6 opp i alle de tre leddene. Med andre ord går 6 opp i $2^{k+1} + 3^{k+1} - 5^{k+1}$. Det betyr at $2^{k+1} + 3^{k+1} \equiv 5^{k+1} \pmod 6$.

Induksjonsprinsippet gir dermed at

$$2^n + 3^n \equiv 5^n \pmod 6 \text{ for alle } n \geq 1.$$

Oppgave 8

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3a_1 + 4a_2 = 7$, $a_3 = 3a_2 + 4a_1 = 25$

Det karakteristiske polynomet $r^2 = 3r + 4$ har de to røttene $r_1 = 4$ og $r_2 = -1$. Generell løsning er dermed $a_n = \alpha_1 4^n + \alpha_2 (-1)^n$. Likningssystemet

$a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ har løsningene $\alpha_1 = \frac{2}{5}$ og $\alpha_2 = \frac{3}{5}$.

$a_1 = 4\alpha_1 - \alpha_2 = 1$ løsningen blir $a_n = \frac{2}{5} 4^n + \frac{3}{5}(-1)^n$, $a_{10} = 419431$

Oppgave 9

i) $2^8 = 256$ ii) $2^7 = 128$

iii) Det må være 4 0-biter og 4 1-biter for at det skal være like mange av hver. Vi kan velge 0-bitene på $\binom{8}{4} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2} = 70$ forskjellige måter.

Hvor mange av dem er negative? Hvis det er like mange av hvert slag, blir det fortsatt like mange av hvert slag hvis vi tar komplementet (dvs. bytter om 0-er og 1-ere). Dermed må det være like mange som har 1 først som har 0 først. Med andre ord er halvparten, dvs. $70/2 = 35$ av dem negative.

Alternativt kan vi holde den første biten fast som 1. Da kan tre 1-ere velges på $\binom{7}{3}$ måter, dvs. $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = 35$ måter.

iv) Vi kan ha syv 1-biter, seks 1-biter og fem 1-biter. Vi kan ikke ha fire eller færre 1-biter siden vi da ikke vil få flere 1-biter enn 0-biter.
Dermed $\binom{7}{7} + \binom{7}{6} + \binom{7}{5} = 1 + 7 + 21 = 29$ positive byte-tall med flere 1-biter enn 0-biter.

Oppgave 10

i) $|A_2| = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50$, $|A_3| = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33$, $|A_5| = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20$

ii) Vi har $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5|$
$- |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

Nå er $|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$, $|A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor = 10$,
$|A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor = 6$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 3$

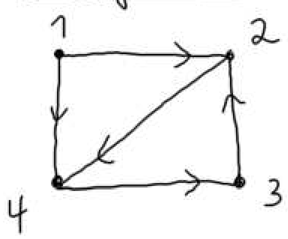
Dermed $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$

Oppgave 11

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C \odot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 12

i) Grafen til R



Matrisen til R

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ii) Teorien sier at der det står 1-ere i matriseproduktet $M_R \odot M_R$ vil det gå en vei med lengde 2.

$$M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det betyr at for flg. tallpar (a, b) så vil det gå en vei med lengde 2 fra a til b:

$(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,2)$

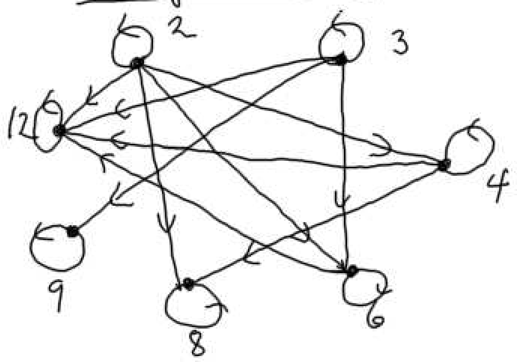
Dette kunne vi også ha funnet ut ved å studere grafen til R.

Oppgave 13

Relasjonen R på A vil bestå av flg. tallpar:

$$R = \{(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(2,12),(3,3),(3,6),(3,9),(3,12),(4,4),(4,8),(4,12),(6,6),(6,12),(8,8),(9,9),(12,12)\}$$

Grafen til R



i) R er refleksiv siden $(a,a) \in R$ for alle $a \in A$.

ii) R er antisymmetrisk siden hvis $a|b$ og $b|a$, så må $a = b$.

iii) R er transitiv siden hvis $a|b$ og $b|c$, så må $a|c$.

R er dermed en partiell ordning

Oppgave 14

i)

x	y	z	$\bar{y}$	$x+\bar{y}$	$(x+\bar{y})z$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0

$$(x+\bar{y})z = xyz + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z$$

ii)

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	
$\bar{x}$		1	1	

Dermed $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} = \bar{z}$

Dette kunne vi også ha funnet ved faktorisering:

$$xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} = x\bar{z}(y+\bar{y}) + \bar{x}\bar{z}(y+\bar{y})$$
$$= x\bar{z} + \bar{x}\bar{z} = \bar{z}(x+\bar{x}) = \bar{z}.$$