## Løsningsforslag for eksamen i Diskret matematikk 20. februar 2004

### Oppgave 1

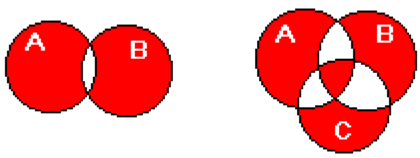
| $p$ | $q$ | $r$ | $p \to q$ | $q \to r$ | $(p \to q) \to r$ | $p \to (q \to r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| S | S | S | S | S | S | S |
| S | S | G | S | G | G | G |
| S | G | S | G | S | S | S |
| S | G | G | G | S | S | S |
| G | S | S | S | S | S | S |
| G | S | G | S | G | **G** | **S** |
| G | G | S | S | S | S | S |
| G | G | G | S | S | **G** | **S** |

$(p \to q) \to r$ og $p \to (q \to r)$ er ikke ekvivalente. Vi ser fra tabellen at i to tilfeller (G, S, G og G, G, G) har de to utsagnene ulike sannhetsverdier.

### Oppgave 2

i) $A \oplus B = \{1,4,5,7\}$, $(A \oplus B) \oplus C = \{1,3,4,6\}$

ii)




### Oppgave 3

*i)* 1*$a$ + 2*(-1) + 3*3 = 1 gir $a$ = -6

*ii)* 2*4 + 3*$b$ + 5*(-2) gir $b$ = 1

*iii)* 1*(-1) + 0*(-1) + 2*$c$ = 1 gir $c$ = 1

### Oppgave 4

$$B6D_{16} = 1011\,0110\,1101_2 = 101\,101\,101\,101_2 = 5555_8$$

### Oppgave 5

*i)* $\emptyset$, $A$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{a,c\}$

**Avdeling for ingeniørutdanning** • Cort Adelersgate 30 • 0254 Oslo • tlf: 22 45 32 00 • faks: 22 45 32 05 • iu@hio.no

*ii)* $V_f$ = {0,1,2,3} siden delmengdene til $A$ har fra 0 til 3 elementer. Funksjonen $f$ er ikke en til en. La for eksempel $X = \{a\}$ og $Y = \{b\}$. Da vil $f(X) = f(Y)$, men $X \neq Y$. Funksjonen $f$ er ikke på siden $V_f \neq \boldsymbol{N}$.

**Oppgave 6**

*i)* Det stemmer for *n* = 1 fordi det da blir $\frac{1}{4}$ på begge sider.

*ii)* Anta at det stemmer for *n* = *k* , dvs. at

$$\frac{1}{1*4}+\frac{1}{4*7}+\frac{1}{7*10}+\;.\;.\;.\;.\;+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \;=\; \frac{k}{3k+1}$$

Må nå vise at det stemmer for *n* = *k* + 1, dvs. at

$$\frac{1}{1*4}+\frac{1}{4*7}+\;.\;.\;.\;.\;+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)} \;=\; \frac{k+1}{3(k+1)+1}$$

Nå er

$$\frac{1}{1*4}+\frac{1}{4*7}+\frac{1}{7*10}+\;.\;.\;.\;.\;+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)}$$

$$= \frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{(k+1)(3k+1)}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{k+1}{3k+4} = \frac{k+1}{3(k+1)+1}$$

Induksjonsprinsippet sier dermed at dette stemmer for alle $n \geq 1$.

**Oppgave 7**

$a_2 = 2a_1 + 3a_0 = 2*2+3*2 = 10$, $a_3 = 2a_2 + 3a_1 = 2*10+3*2 = 26$

Det karakteristiske polynomet $r^2 - 2r - 3$ har røttene $r_1 = 3$ og $r_2 = -1$.
Generell løsning: $a_n = c_1 3^n + c_2(-1)^n$, $a_0 = a_1 = 2$ gir $c_1 = c_2 = 1$. Dermed

$$a_n = 3^n + (-1)^n$$

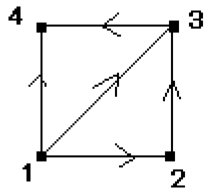
$a_{13} = 3^{13} + (-1)^{13} = 1594323 - 1 = 1594322$

**Oppgave 8**

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } A \odot C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Oppgave 9**

*i)* Generelt gjelder at *R* er transitiv hvis det for alle verdier *a*, *b* og *c* der $aRb$ og $bRc$, er slik at $aRc$. Vi har at både (2,3) og (3,4) er i *R*, men at (2,4) ikke er i *R*, dvs. R er ikke transitiv. Men hvis vi hadde utvidet *R* med (2,4), så ville *R* ha blitt transitiv.




$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

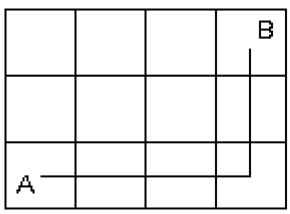
*ii)* (1,3) , (1,4) , (2,4)

*iii)* $$M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

OBS: Vi kan finn *iii)* bed hjelp av *ii)* siden matrisen i *iii)* vil ha 1-ere kun for de parene *(a,b)* der det går en vei fra *a* til *b* med lengde 2.

**Oppgave 10**

*i)*




*ii)* $\binom{5}{2} = 10$, *iii)* $\binom{m+n-2}{m-1}$