Eksamen i Diskret matematikk fredag 5. desember 2014

Løsningsforslag

Oppgave 1 a) 3 poeng b) 4 poeng c) 3 poeng

a) i) $p \wedge \neg q$ ii) $\neg(p \vee q)$ iii) $p \rightarrow q$ iv) $\neg q \rightarrow \neg p$

b) Dette kan løses på flere måter, f.eks. ved sannhetsverditabell:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \wedge \neg q$	$q \wedge \neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$
S	S	U	U	S	S	U	U	U	U	U
S	U	U	S	S	U	S	S	U	S	S
U	S	S	U	S	U	S	U	S	S	S
U	U	S	S	U	U	S	U	U	U	U

like kolonner

Vi får at $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ er ekvivalent med $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ siden det blir like kolonner i sannhetsverditabellen.

Dette kan også vises ved hjelp av formler:

$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) =$

$(p \vee (q \wedge \neg p)) \wedge (\neg q \vee (q \wedge \neg p)) =$ distributiv lov

$((p \vee q) \wedge (p \vee \neg p)) \wedge ((\neg q \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)) =$ distributiv lov

$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) =$ $p \vee \neg p \equiv S$, $\neg q \vee q \equiv S$

$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ deMorgans lov

Vi kan skrive $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ på flg. enklere og kortere form:

$p \oplus q$ (eksklusiv eller)

c)

i) $\exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(x))$

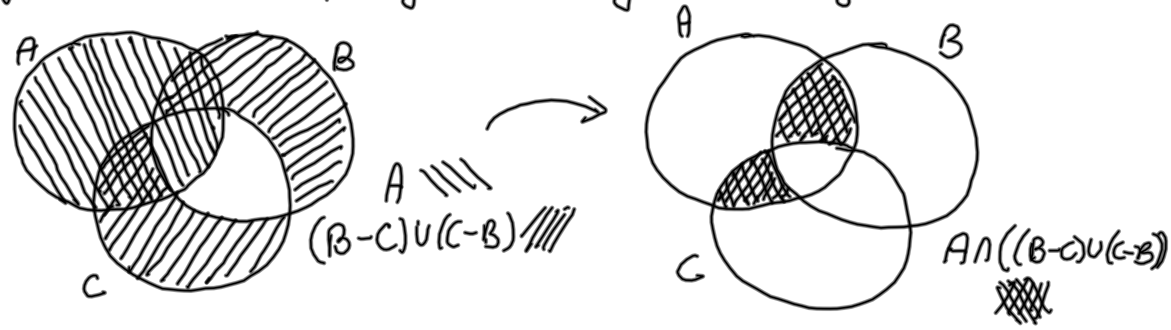
ii) $\neg \forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$

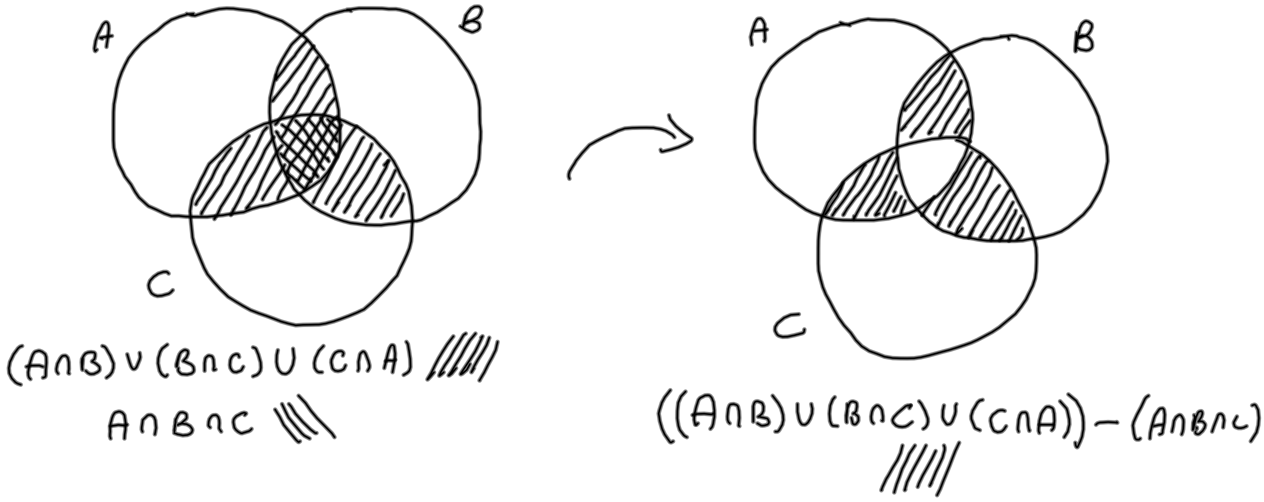
iii) $\neg \exists x (\neg (P(x) \vee Q(x))$ som er lik $\forall x\, (P(x) \vee Q(x))$.

Obs: i) kan ikke skrives som $\exists x P(x) \wedge \neg \exists x Q(x)$. Det har ikke samme betydning. Pass også på korrekte parenteser.

Oppgave 2 a) 4 poeng b) 3 poeng c) 3 poeng

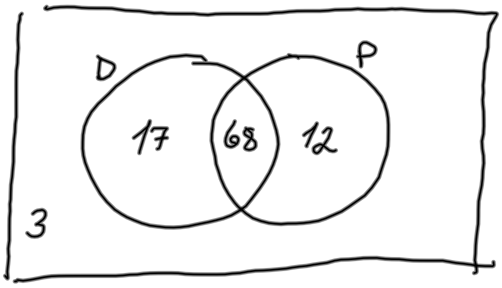
a)





b) Her er det flere muligheter. F.eks. $((A-B)\cup(B-A))-C$ eller $(A\oplus B)-C$.

c) La D og P være mengdene av de som skal ta henholdsvis Diskret matematikk og Programmering



i) Diskret matematikk, men ikke Programmering: $85-68=17$

ii) Ingen av emnene: $100-(17+68+12)=100-97=3$.

Oppgave 3 2 poeng for hvert av de fem punktene

a) Det er $6\cdot 6=36$ par i $A\times A$

b) Den minste summen er $1+1=2$ og den største lik $6+6=12$. Vi ser at $1+2=3$, $1+3=4$, $1+4=5$, $1+5=6$, $1+6=7$, $2+6=8$, $3+6=9$, $4+6=10$ og $5+6=11$. Dermed blir $V_f=\{2,3,4,\dots,11,12\}$.

c) Flg. par (a,b) er slik at $a+b=7$:

$(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$ og $(6,1)$

d) f er ikke en-til-en fordi f.eks. $f(1,6)=f(6,1)=7$ og $(1,6) \neq (6,1)$.

e) f er ikke på siden $V_f = \{2,3,\dots,11,12\}$ og $B = \{1,2,3,\dots,11,12\}$ er forskjellige. $1 \in B$ og $1 \notin V_f$.

Oppgave 4 a) 2 poeng b) 3 poeng c) 3 poeng d) 2 poeng

a) A er en 4×2-matrise og $B = 2\times 4$-matrise

b) AB blir en 4×4-matrise.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$1\cdot 1 + 2\cdot 2 = 5$

$1\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2$

$1\cdot 2 + 2(-1) = 0$

osv.

c) BA blir en 2×2-matrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot 2 + (-1)(-1) = 6$

$1\cdot 2 + 0\cdot 1 + 2(-1) + (-1)\cdot 0 = 0$

osv.

d) En kvadratisk matrise er symmetrisk hvis den er symmetrisk om hoveddiagonalen. Det er det samme som at matrisen er lik sin transponerte.

Vi har at $AB = (AB)^T$ og $BA = (BA)^T$. Dermed er både AB og BA symmetriske matriser.

Vi ser forøvrig at $B = A^T$. Dermed blir $AB = AA^T$ og vi har alltid at $(AA^T)^T = AA^T$. Tilsvarende er $BA = A^TA$ og $(A^TA)^T = A^TA$. Generelt er $(AB)^T = B^TA^T$.

Oppgave 5 2,5 poeng for hvert av de fire punktene

a) $a = 999999_{16}$

$$= 9 \cdot \sum_{i=0}^{5} 16^i = 9 \frac{16^6 - 1}{16 - 1} = \frac{3}{5} 16777215 = 10066329_{10}$$

b)

917	458	229	114	57	28	14	7	3	1	0
2	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1

$$917_{10} = 1110010101_2 = 1 | \underset{6}{110} | \underset{2}{010} | \underset{5}{101} = 1625_8$$

c) Forskjellen mellom to og to ledd er 6.

Antall ledd er $(103-7)/6 + 1 = \frac{96}{6} + 1 = 16 + 1 = 17.$

Summen er lik $(7+103) \cdot 17/2 = 935.$

d) $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$

Dermed blir minste felles multiplum lik $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$

Det er også mulig å finne største felles divisor først. Den er lik $2 \cdot 3 = 6$. Dermed blir minste felles multiplum lik $60 \cdot 126/6 = 1260$.

Oppgave 6 a) 2 poeng b) 3 poeng c) 2 poeng d) 3 poeng

a) $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28, \qquad \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$

b) Hvis en bitsekvens har ingen 0-biter, 1 0-bit, 2 0-biter eller 3 0-biter, så vil den ha færre 0-biter enn 1-biter.

Svaret blir dermed $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} = 1 + 8 + 28 + 56 = 93.$

c) SUPPEPOSE har 3 P-er, 2 E-er, 2 S-er, 1 O og 1 U. Dermed:

$$\frac{9!}{3!\,2!\,2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 2 \cdot 2} = 15120.$$

d) Det er $1 \cdot 10^3 = 1000$ fall der 1 står først, $9 \cdot 1 \cdot 10^2$ fall der 1 som siffer nr. 2, $9 \cdot 1 \cdot 10^2$ der 1 står som siffer nr. 2 og til slutt $9 \cdot 1 \cdot 10^2$ der 1 står sist.
Dermed har 1 blitt brukt $1000 + 900 + 900 + 900 = 3700$ ganger. Det blir på samme måte med 3, dvs. 3 blir brukt 3700 ganger.

Obs: d) kan løses på andre måter. Se til slutt!

Oppgave 7 a) 2 poeng b) 2 poeng c) 3 poeng d) 3 poeng

a) Da må hvert siffer være enten 2 eller 3. Det gir
$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32 \text{ fall.}$$

b) $\binom{5}{2} 2^3 = 10 \cdot 8 = 80.$

c) Denne kan løses på mange måter. Her bruker vi en differensligning (se til slutt for andre måter):

Gitt en vilkårlig sekvens med 1, 2 eller 3 med lengde n der det ikke er to 1-ere ved siden av hverandre. En slik sekvens må slutte med 1, 2 eller 3. Hvis den slutter med 1, kan ikke nest siste siffer være 1.

Omvendt: Hvis vi har en slik sekvens med lengde $n-1$ får vi en med lengde n hvis vi setter 2 eller 3 bakerst. Hvis vi har en med lengde $n-2$, får vi en med lengde n hvis vi setter 21 eller 31 bakerst. Dette gir flg. differensligning:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2(a_{n-1} + a_{n-2}), \quad a_0 = 1, a_1 = 3.$$

Dermed $a_2 = 2(3+1) = 8$, $a_3 = 2(8+3) = 22$,
$a_4 = 2(22+8) = 60$, $a_5 = 2(60+22) = 164$
Svaret blir derfor 164.

d) i) Vi kan ikke ha fire 3-ere siden minste mulige tverrsum med fire 3-ere er 11 (3+3+3+1+1).

ii) Vi kan ha to 3-ere, men da må de tre andre sifrene være en 2-er og to 1-ere (f.eks. 31231). Dette kan vi stokke om på $\frac{5!}{2!2!} = 30$ måter

iii) Vi kan ha ēn 3-er, men da må de fire andre sifrene være tre 2-ere og en 1-er (f.eks. 32122). Dette kan vi stokke om på $\frac{5!}{3!} = 20$ måter.

iii) Det er kun Ēn mulighet uten 3-ere. Det er tilfellet 22222.

Tilsammen blir det $30+20+1=51$ slike tall som har tverrsum lik 10.

Oppgave 8 a) 2 poeng b) 6 poeng c) 2 poeng

a) $a_2 = a_1 + 12a_0 = 5 + 12 \cdot 3 = 41.$

$a_3 = a_2 + 12a_1 = 41 + 12 \cdot 5 = 101.$

b) Karakteristisk polynom: $r^2 = r + 12$ eller $r^2 - r - 12 = 0$.

$r = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-12)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$, $r_1 = 4$, $r_2 = -3$.

Generell løsning: $a_n = \alpha 4^n + \beta(-3)^n$

Vi finner α og β ved:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \alpha + \beta = 3 \\ a_1 &= 4\alpha - 3\beta = 5 \end{aligned}\right\} \alpha = 2, \beta = 1$$

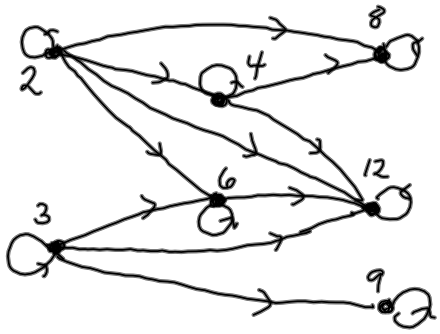
Løsning: $a_n = 2 \cdot 4^n + (-3)^n$, $a_2 = 2 \cdot 16 + 9 = 41$, $a_3 = 2 \cdot 64 - 27 = 101$

c) $a_7 = 2 \cdot 4^7 + (-3)^7 = 2 \cdot 16384 - 2187 = 30581.$

Oppgave 9 2 poeng på hvert av de fem punktene.

$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,12), (3,3), (3,6), (3,9), (3,12), (4,4), (4,8), (4,12), (6,6), (6,12), (8,8), (9,9), (12,12)\}$.

a) G_R:



b)
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) i) R er refleksiv fordi ethvert tall fra A går opp i seg selv.

ii) R er ikke symmetrisk fordi hvis vi har to forskjellige heltall a og b slik at a går opp i b, så kan ikke b gå opp i a.

iii) R er antisymmetrisk fordi hvis vi har to forskjellige heltall a og b slik at a går opp i b, så går ikke b opp i a.

iv) R er transitiv fordi hvis vi har tre heltall a, b og c slik at a går opp i b og b går opp i c, så går a opp i c.

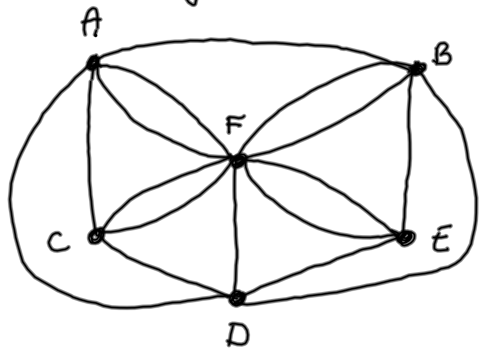
d) En relasjon R på en mengde A er en delvis ordning hvis den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv. I punkt c) har vi vist at R oppfylles disse tre kravene. Dermed er R en delvis ordning.

e) i) 2 er et minimalt element fordi det ikke finnes noe tall fra A forskjellig fra 2 som går opp i 2. På en tilsvarende måte finner vi at også 3 er et minimalt element.

ii) 8 er et maksimalt element siden det ikke finnes noe tall i A forskjellig fra 8 som 8 går opp i. På en tilsvarende måte ser vi at også 9 og 12 er maksimale elementer.

Oppgave 10 2 poeng på hvert av de fem punktene.

a)



b) grad (A) = 5, grad(B) = 5, grad (C) = 4, grad(D) = 5,
grad(E) = 4, grad(F) = 9

c) Det finnes verken en åpen eller en lukket Euler-vei siden det er flere enn to (dvs. fire) punkter som har oddefallsgrad.

d) Oppgaven spør om det finnes en lukket Euler-vei hvis det fjernes en kant i grafen. I så fall må alle punktene få partallsgrad. Men det er umulig siden det allerede er fire punkter med oddetallsgrad.

e) Det blir en lukket Euler-vei hvis

i) det fjernes en dør mellom A og B og ytterdøren i D eller

ii) det fjernes en dør mellom A og D og en ytterdør i B eller

iii) det fjernes en dør mellom B og D og en ytterdør i A

Hvis en f.eks. velger i) gir f.eks. dette en lukket Euler-vei:

A, C, F, C, D, E, F, E, B, F, B, D, A, F, A

Alternativ løsning av 6d)

i) Antall tall med én 1-er:

$$\underbrace{1\cdot 9\cdot 9\cdot 9}_{\text{1 først}} + \underbrace{8\cdot\binom{3}{1}\cdot 9\cdot 9}_{\text{1 ikke først}} = 2673$$

ii) Antall tall med to 1-ere:

$$\underbrace{1\cdot\binom{3}{1}\cdot 9\cdot 9}_{\text{1 først}} + \underbrace{8\cdot\binom{3}{2}\cdot 9}_{\text{1 ikke først}} = 459$$

iii) Antall tall med tre 1-ere:

$$1\cdot\binom{3}{2}\cdot 9 + 8\binom{3}{3} = 35$$

iii) Antall tall med fire 1-ere

$$\binom{4}{4} = 1$$

Det totale antallet 1-ere blir: $2673\cdot 1 + 459\cdot 2 + 35\cdot 3 + 1\cdot 4 = 3700$

Alternativ løsning av 7c

i) 32 tall uten 1-ere og dermed ingen 1-ere ved siden av hverandre

ii) 80 tall med én 1-er og —— " —— " ——

iii) Det er flg. seks muligheter med nøyaktig to 1-ere som ikke står ved siden av hverandre:

1_1__ , 1__1_ , 1___1, _1_1_ , _1__1, __1_1

Det er to mulige tall på hver av plassene markert med _. Dermed:

$6\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 48$

iii) Det er kun én mulighet med tre 1-ere der ingen står ved siden av hverandre. Det er 1_1_1. Det er to mulig tall på plassene markert med _. Dermed:

$1\cdot 2\cdot 2 = 4$

iv) Det er ingen slike tall med fire eller fem 1-er.

Tilsammen: $32 + 80 + 48 + 4 = 164$.