HØGSKOLEN I OSLO OG AKERSHUS

# Fakultet for teknologi, kunst og design
# Teknologiske fag

## Eksamen i: Diskret matematikk

**Målform:** Bokmål

---

**Dato:** 05.12.2014

**Tid:** 5 timer / kl. 9 - 14

**Antall sider (inkl. forside):** 10

**Antall oppgaver:** 10

**Tillatte hjelpemidler:**
Forhåndsgodkjent ordbok. Håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst og som ikke kan regne symbolsk.

**Merknad:** Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig.
Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Besvarelsen skal merkes med kandidatnummer, ikke navn.
Bruk blå eller sort kulepenn på innføringsarket.

**Faglig veileder:** Ulf Uttersrud

| Utarbeidet av (faglærer): | Kontrollert av (en av disse): | | | Instituttleders/ Programkoordinators underskrift: |
|---|---|---|---|---|
| | Annen lærer | Sensor | Instituttleder/ Programkoordinator | |
| Ulf Uttersrud | | | | |

**Emnekoder:** DAPE1300 – ITPE1300

Alle de 10 oppgavene teller likt. I oppgaver med underpunkter vil krevende og mer omfattende underpunkter kunne telle mer enn lette og enkle underpunkter. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave. **Alle svar skal begrunnes!** Det kan for eksempel skje ved at du tar med mellomregninger eller gir andre former for argumentasjon. **Kun et svar uten noen begrunnelse er normalt verdiløst.**

## Oppgave 1

a) La $p$ være utsagnet: *Jeg er syk* og $q$ utsagnet: *Jeg har feber*. Sett opp flg. fire utsagn ved hjelp av $p$, $q$ og logiske operatorer:

i) Jeg er syk, men jeg har ikke feber.
ii) Jeg er verken syk eller har feber.
iii) Jeg er syk bare hvis jeg har feber.
vi) Hvis jeg ikke har feber, så er jeg ikke syk.

b) La $p$ og $q$ være vilkårlige utsagn. Avgjør om utsagnene $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ og $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ er logisk ekvivalente. Er det mulig å skrive $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ på en kortere måte?

c) La $x$ være en student. La $P(x)$ være utsagnsfunksjonen «*x skal ta eksamen i Diskret matematikk*» og $Q(x)$ utsagnsfunksjonen «*x skal ta eksamen i Programmering*». Skriv følgende utsagn ved hjelp av $P(x)$, $Q(x)$, kvantorer og logiske operatorer:

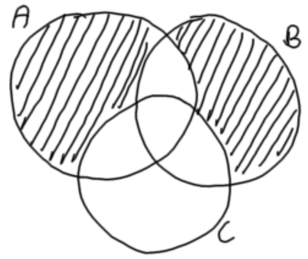
i) Det er en som skal ta eksamen i Diskret matematikk, men ikke eksamen i Programmering.
ii) Ikke alle skal ta eksamen i både Diskret matematikk og Programmering.
iii) Det er ingen studenter som verken skal ta eksamen i Diskret matematikk eller eksamen i Programmering.

## Oppgave 2

La $A$, $B$ og $C$ være vilkårlige mengder.

a) Tegn Venn-diagram og skravér mengdene $A \cap ((B - C) \cup (C - B))$ og $((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) - (A \cap B \cap C)$.

b) Finn en mengdeformel med $A$, $B$ og $C$ for det skraverte området under:
(se neste side)




c) I en gruppe på 100 studenter skal 85 ta eksamen i Diskret matematikk og 80 skal ta eksamen i Programmering. Det er 68 stykker som skal ta eksamen i begge emnene. Hvor mange av dem skal ta eksamen i Diskret matematikk, men ikke i Programmering. Hvor mange av dem er det som ikke skal ta eksamen i noen av de to emnene?

**Oppgave 3**

Gitt mengden $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Mengden $A \times A$ er mengden av par der begge elementene i paret hentes fra A. For eksempel er $(2, 5)$, $(4, 4)$ og $(6, 3)$ slike par. La B være mengden $\{1, 2, 3, \cdot\ \cdot\ \cdot, 11, 12\}$ og la $(a,b)$ være et vilkårlig par fra $A \times A$. Vi definerer funksjonen $f : A \times A \rightarrow B$ ved $f(a,b) = a + b$.

a) Hvor mange par er det i $A \times A$?
b) Finn verdimengden til $f$?
c) Hvor mange par $(a,b)$ i $A \times A$ er det som har $f(a,b) = 7$? Skriv dem opp.
d) Er $f$ en-til-en?
e) Er $f$ på?

**Oppgave 4**

Gitt tallmatrisene $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ og $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Hvilken dimensjon har A ? Hvilken dimensjon har B ?

b) Hvilken dimensjon får matriseproduktet AB. Finn AB.

c) Hvilken dimensjon får matriseproduktet BA ? Finn BA .

d) Hva betyr det at en kvadratisk matrise er symmetrisk? Er AB symmetrisk? Er BA symmetrisk?

**Oppgave 5**

a) Heltallet $a = 1001100110011001100110011001_2$ er gitt på binærform. Finn det på heksadesimal form og på desimalform.

b) Heltallet $b = 917_{10}$ er gitt på desimal form. Finn det på binær form og på oktal form.

c) Finn summen 7 + 13 + 19 + 25 + . . . . + 97 + 103.

d) Minste felles multiplum (eng: least common multiple) for to positive heltall *a* og *b* er det minste positive heltallet som både *a* og *b* går opp i. Finn minste felles multiplum for 60 og 126.

**Oppgave 6**

a) Finn binomialkoeffisientene $\binom{8}{2}$ og $\binom{8}{3}$.

b) Hvor mange bitsekvenser på 8 biter har færre 0-biter enn 1-biter?

c) Hvor mange måter kan ordet SUPPEPOSE stokkes om?

d) Anta at samtlige firesifrede heltall (tallene fra og med 1000 til og med 9999) er skrevet opp. Hvor mange ganger har da sifferet 1 blitt skrevet opp? Hvor mange ganger har sifferet 3 blitt skrevet opp?

**Oppgave 7**

La A være mengden av femsifrede tall der kun sifrene 1, 2 og 3 inngår. For eksempel vil 12331, 23211 og 32223 være med i A.

a) Hvor mange tall i A har ikke 1 som siffer?

b) Hvor mange tall i A inneholder sifferet 1 nøyaktig to ganger?

c) Hvor mange tall i A har **ikke** to 1-ere ved siden av hverandre? For eksempel har 32113 og 31112 to 1-ere ved siden av hverandre, men det har ikke 13122, 12121 og 23232.

d) Hvor mange tall i A er det som har tverrsum lik 10? Det gjelder for eksempel tallene 31231 og 32122, men ikke 32123.

**Oppgave 8**

Gitt differensligningen $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$ , $n \geq 2$ , $a_0 = 3$ , $a_1 = 5$ .

a) Finn $a_2$ og $a_3$ .

b) Finn en formel for $a_n$ . Vis at formelen din stemmer ved å sette inn $n$ = 2 og 3. Da skal du få de samme resultatene som i punkt a).

c) Finn $a_7$ ved å sette inn i formelen du fant i b) eller ved å regne ut $a_4$ , $a_5$ , $a_6$ og så $a_7$ ved hjelp av differensligningen $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$ .

**Oppgave 9**

La $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12\}$ . Gitt flg. relasjon $R$ på $A$ : $(a,b) \in R$ hvis $a$ går opp i $b$ . Det betyr f.eks. at $(3,9) \in R$ siden 3 går opp i 9, mens $(3,8) \notin R$ siden 3 ikke går opp i 8.

a) Tegn grafen $G_R$ til $R$

b) Sett opp matrisen $M_R$ til $R$ (det blir en $7 \times 7$ -matrise)

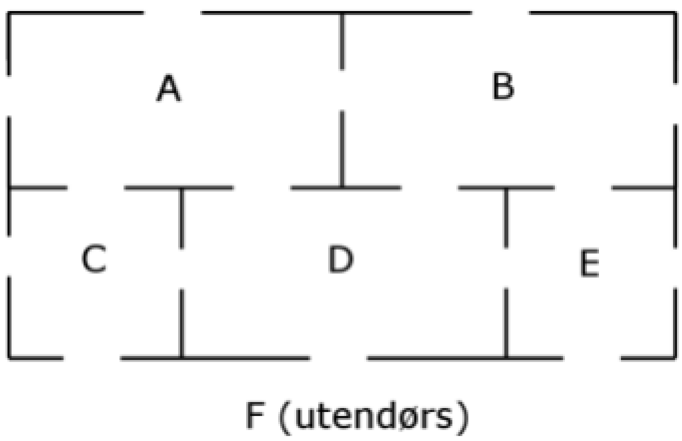
c) Svar på flg. spørsmål:

Er $R$ *i)* refleksiv? *ii)* symmetrisk? *iii)* antisymmetrisk? *iv)* transitiv?

d) $R$ er en delvis (partiell) ordning. Hvorfor?

e) Sett opp de maksimale og minimale elementene i $A$ med hensyn på $R$.

**Oppgave 10**



Figuren over (forrige side) viser rommene i et hus. Det er fem rom med navn A, B, C, D og E. I hvert rom er det et antall dører (markert på figuren med åpninger). For eksempel er det fem dører i rom A. Noen dører går ut av huset (til F) og noen går til andre rom. F. eks. er det to dører fra A til F og videre en dør fra A til hvert av rommene B, C og D.

a) La hvert av rommene (A, B, C, D, E) og utendørs (F) være punkter i en graf med dørene som kanter mellom punktene. Tegn grafen.

b) Sett opp graden til hvert av de seks punktene i grafen.

c) Er det mulig å starte i et av rommene eller eventuelt utendørs og så gå gjennom hver dør nøyaktig én gang?

d) Er det mulig å starte i et av rommene eller eventuelt utendørs og så gå gjennom hver dør nøyaktig én gang og **ende opp der en startet** hvis det «fjernes» en dør i huset (dvs. tettes igjen - hel vegg istedenfor dør)? Hvis ja, oppgi hvilken dør som må «fjernes» og sett opp en vei en kan gå.

e) Er det mulig å starte i et av rommene eller eventuelt utendørs og så gå gjennom hver dør nøyaktig én gang og **ende opp der en startet** hvis det «fjernes» to dører i huset (dvs. tettes igjen - hel vegg istedenfor dør)? Hvis ja, oppgi hvilke dører som må «fjernes» og sett opp en vei.

**Definisjoner og formler**

**Logiske operatorer:**

$\neg$ (ikke), $\wedge$ (og), $\vee$ (eller), $\oplus$ (eksklusiv eller), $\rightarrow$ (implikasjon)

**Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:**

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $\quad$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\quad$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ $\quad$ $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$ $\quad$ $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

**Noen mengdeidentiteter:**

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\quad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

**Kardinalitet – antallet elementer i en union:**

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

**Funksjoner:**

I funksjonen $f: A \to B$ betyr $A$ definisjonsmengde og $B$ verdiområde. En funksjon $f: A \to B$ er en-til-en hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon $f: A \to B$ er på hvis $\forall (b \in B)\, \exists (a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

**Matriser**

Den transponerte til en matrise $\mathrm{A}$ betegnes med $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$ og er den matrisen vi får når radene og kolonnene i $\mathrm{A}$ byttes om. Første rad i A blir første kolonne i $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$, andre rad i A blir andre kolonne i $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$, osv. Det betyr spesielt at hvis $\mathrm{A}$ er en $\mathrm{m} \times \mathrm{n}-$ matrise, så blir $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$ en $\mathrm{n} \times \mathrm{m}-$ matrise.

**Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen), div og mod:**

La $a$ være et heltall og $d$ et positivt heltall. Da finnes entydige heltall $q$ og $r$ med $0 \leq r < d$ slik at $a = dq + r$. Operasjonene **div** og **mod** defineres ved at $a$ div $d = q$ og $a \bmod d = r$.

**Største felles divisor**
Største felles divisor (greatest common divisor – gcd) for to hele tall som ikke begge er 0, er det største heltallet som går opp i begge tallene.

**Minste felles multiplum**
Minste felles multiplum (least common multiple – lcm) for to positive heltall er det minste positive heltallet som begge går opp i.

**Formel gcd(a,b) og lcm(a,b)**: Hvis $\gcd(a,b)$ er største felles divisor for a og b og $lcm(a,b)$ er minste felles multiplum for a og b, så er $ab = \gcd(a,b) \cdot lcm(a,b)$

**Moduloregning:**

La $m$ være et positivt heltall. To heltall $a$ og $b$ kalles kongruente *modulo* $m$ hvis $m$ går opp i $a - b$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

1) $\mathrm{a} \equiv \mathrm{b} \pmod{\mathrm{m}}$ hvis og bare hvis $\mathrm{a} \bmod \mathrm{m} = \mathrm{b} \bmod \mathrm{m}$
2) $\mathrm{a} \equiv \mathrm{b} \pmod{\mathrm{m}}$ og $\mathrm{c} \equiv \mathrm{d} \pmod{\mathrm{m}}$, så er $\mathrm{a} + \mathrm{c} \equiv \mathrm{b} + \mathrm{d} \pmod{\mathrm{m}}$ og $\mathrm{ac} \equiv \mathrm{bd} \pmod{\mathrm{m}}$.

HØGSKOLEN I OSLO OG AKERSHUS

**Tverrsum**

La a være et positivt heltall. Tverrsummen til a er kongruent med a modulo 9.

**Summen av rekker:**

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^{n} a r^k = a\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$, $r \neq 1$

Aritmetisk rekke: La $a$ være første ledd, $b$ siste ledd og $d$ differensen mellom to og to ledd. Antall ledd $n$ er gitt ved $n = \frac{b-a}{d} + 1$ og summen er lik $\frac{(a+b)n}{2}$

**Binomialkoeffisienter:**

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}, \qquad \binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \qquad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

**Binomialteoremet:**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

**Antall forskjellige utvalg på $r$ stykker fra en samling på $n$ stykker:**

| | |
|---|---|
| Ordnet uten tilbakelegging: | $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ |
| Uordnet uten tilbakelegging: | $\binom{n}{r}$ |
| Ordnet med tilbakelegging: | $n^r$ |
| Uordnet med tilbakelegging: | $\binom{n+r-1}{r}$ |

**Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:**

Hvis $N$ objekter skal plasseres i $k$ bokser, må minst én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

HØGSKOLEN I OSLO OG AKERSHUS

**Differensligninger:**

Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der $c_1$ og $c_2$ er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2 .$$

Hvis det karakteristiske polynomet har to forskjellige reelle løsninger $r_1$ og $r_2$, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der $\alpha$ og $\beta$ er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene $a_0$ og $a_1$ er gitt, finner en $\alpha$ og $\beta$ ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomet har kun én løsning $r_0$, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der $\alpha$ og $\beta$ er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene $a_0$ og $a_1$ er gitt, finner en $\alpha$ og $\beta$ ved å løse et ligningssystem.

**Relasjoner:**

En relasjon $R$ på en mengde $A$ er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La $R$ være en relasjon på en mengde $A$.

$R$ er refleksiv hvis $(a,a) \in R$ for alle $a \in A$.

$R$ er symmetrisk hvis $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \in R$.

$R$ er antisymmetrisk hvis $a \neq b$ og $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \notin R$.

$R$ er transitiv hvis $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$, så er $(a,c) \in R$.

**En partisjon**

En samling delmengder $A_1$, $A_2$, $A_3$, . . . , $A_n$ av en mengde $A$ utgjør en partisjon av $A$ hvis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \, . \, . \, . \cup A_n = A$ og $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$.

**Ekvivalensrelasjoner**

En relasjon $R$ på en mengde $A$ er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

**Ekvivalensklasser**

Hvis $R$ er en ekvivalensrelasjon på en mengde $A$ og $a \in A$, så er ekvivalensklassen $[a]$ til $a$ definert ved $[a] = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$. Eller med ord: $[a]$ er lik mengden av de $b \in A$ som er relatert til $a$. Ekvivalensklassene til en relasjon utgjør en partisjon av $A$.

**Delvis- eller partiell ordning**

En relasjon $R$ på en mengde $A$ er en delvis ordning hvis den er *refleksiv*, *antisymmetrisk* og *transitiv*. Hvis dette er oppfylt, sier vi at $A$ er en delvis ordnet mengde (med hensyn på $R$). Et element $a \in A$ er et *maksimalt* element hvis det ikke finnes noen $b \in A$ $(b \neq a)$ slik at $(a,b) \in R$. Det betyr at det er ikke noe element som kommer «etter» $a$ i ordningen. Tilsvarende er et element $a \in A$ et *minimalt* element hvis det ikke finnes noen $b \in A$ $(b \neq a)$ slik at $(b,a) \in R$.

**Grafteori:**

**Graden til et punkt**. La $a$ være et punkt (eng: vertex) i en urettet graf. Graden $grad(a)$ til $a$ er antallet kanter knyttet til punktet.

**Grad-kant-setningen**:

La $G$ være en urettet graf med endelig mange kanter. Da vil summen av gradene til punktene i $G$ være dobbelt så stor som antallet kanter.

**Eulers setning:**

En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en lukket Euler-vei (en Euler-sykel) hvis og bare hvis alle punktene i grafen har partallsgrad.

En sammenhengende urettet graf har en åpen (ikke-lukket) Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to punkter i grafen har oddetallsgrad.