Eksamen i Diskret matematikk torsdag 5. desember 2013

Løsningsforslag

Oppgave 1 a) 3 poeng, b) 3 poeng, c) 4 poeng

a) i) $p \wedge \neg q$ ii) $p \rightarrow q$ iii) $p \rightarrow q$ iv) $\neg q \rightarrow \neg p$

b) Hvis vi velger $m > 0$, kan vi velg $n < 0$. Da blir $mn < m^2$.
Hvis vi velger $m < 0$, kan vi velge $n > 0$. Da blir $mn < m^2$.
Men hvis $m = 0$, så finnes ingen n slik at $mn < m^2$ siden det betyr $0 < 0$. Med andre ord er utsagnet $\forall m \exists n \, (mn < m^2)$ usant.

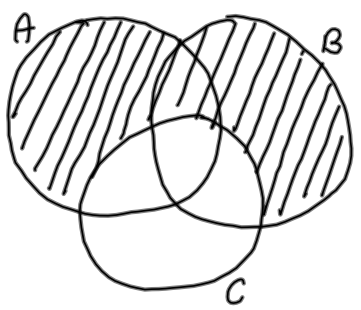
c)

p	q	r	$p \wedge q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	U	S	U	U	U	U
S	U	S	U	S	S	S	S
S	U	U	U	U	S	S	S
U	S	S	U	S	S	S	S
U	S	U	U	S	U	S	S
U	U	S	U	S	S	S	S
U	U	U	U	S	S	S	S

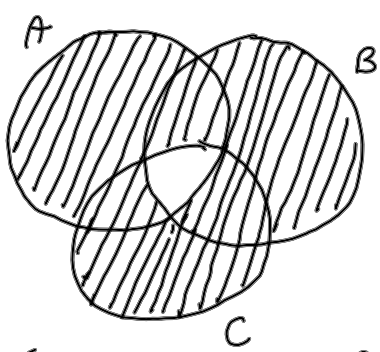
Utsagnene $(p \wedge q) \rightarrow r$ og $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ er ekvivalente siden de har like kolonner i sannhetsverditabellen.

Oppgave 2 a) 3 poeng, b) 2 poeng, c) 5 poeng

a)



$(A \cup B) - C$ ////



$(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A)$ ////

b) For eksempel $(A - (B \cap C)) \cup ((B \cap C) - A)$

c) $|A| = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50$, $|A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$

$|(A \cap B) - C| = |A \cap B| - |A \cap B \cap C| = 16 - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor = 16 - \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 16 - 3 = 13$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$= 50 + \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - 16 - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 5} \right\rfloor + 3$

$= 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$

Oppgave 3 Hver deloppgave teller 2 poeng.

a) Det er $\binom{6}{3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$ tre-utvalg.

b) Vi kan sette opp flg. tabell:

a	$f(a)$
$\{1,2,3\}$	6
$\{1,2,4\}$	7
$\{1,2,5\}$	8
$\{1,2,6\}$	9
$\{1,3,6\}$	10
$\{1,4,6\}$	11
$\{1,5,6\}$	12
$\{2,5,6\}$	13
$\{3,5,6\}$	14
$\{4,5,6\}$	15

Det finnes ingen tre-utvalg med sum mindre enn 6 og større enn 15. Dermed blir verdimengden til f lik

$$V_f = \{6, 7, 8, \dots, 14, 15\}.$$

c) Elementene i mengden $\{a \in A \mid f(a) = 10\}$ er tre-utvalgene med 10 som sum. Det er flg. tre-utvalg:

$\{1,3,6\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,3,5\}$

d) f er ikke en-til-en fordi f.eks $a = \{1,3,6\}$ er forskjellig fra $b = \{1,4,5\}$, men $f(a) = 10 = f(b)$.

e) I oppgaven står det at $B = \{1,2,\dots,15\}$. Det finnes ikke noe fre-utvalg a slik at $f(a) = 5$. Dermed er f ikke på.

Oppgave 4

a) 2 poeng, b) 3 poeng, c) 3 poeng, d) 2 poeng

a) $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

b)
$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot1+0\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot2 & 1\cdot(-1)+0\cdot1 \\ 0\cdot1+1\cdot1 & 0\cdot0+1\cdot2 & 0\cdot(-1)+1\cdot1 \\ 1\cdot1+(-1)\cdot1 & 1\cdot0+(-1)2 & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

c) Dette er en aritmetisk rekke siden differensen mellom et ledd og det foregående leddet er fast lik 6.

Antall ledd $n = \frac{301-7}{6} + 1 = 49 + 1 = 50$.

Summen er lik $(301+7)\cdot 50/2 = 7700$.

d) Dette kan ses på som de fem første leddene i en geometrisk følge siden forholdet mellom et ledd og det foregående leddet er fast lik 3. I så fall er neste ledd $162 \cdot 3 = 486$.

Oppgave 5

a) 3 poeng, b) 3 poeng, c) 1 poeng, d) 3 poeng

a)

365	182	91	45	22	11	5	2	1	0
2	1	0	1	1	0	1	1	0	1

$365_{10} = 101101101_2 = \underset{1}{1}\ \underbrace{0110}_{6}\ \underbrace{1101}_{D} = 16D_{16}$

b) $a = 777_8$

$$\begin{array}{r} 777_8 \\ +\quad 1_8 \\ \hline 1000_8 \end{array}$$

Vi har $a+1 = 1000_8$
$= 1000000000_2 = 2^9 = 512_{10}$

c) $1260 = 2\cdot 630 = 2\cdot 2\cdot 315 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 105 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 35$
$= 2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$.

d)

a	b	r
189	104	85
104	85	19
85	19	9
19	9	1
9	1	0

Euklids algoritme gir at 1 er største felles divisor for 189 og 104.

Oppgave 6 a) 2 poeng, b) 3 poeng, c) 2 poeng, d) 3 poeng

a) $\binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$, $\binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2} = 56$

b) Ingen 0-biter: $\binom{8}{0} = 1$
Én 0-bit: $\binom{8}{1} = 8$
To 0-biter: $\binom{8}{2} = 28$
Tre 0-biter: $\binom{8}{3} = 56$

Færre 0-biter enn 1-biter: $1+8+28+56 = 93$.

Dette kan også løses slik: Det er 256 forskjellige bitsekvenser med lengde 8 og $\binom{8}{4} = 70$ som har like mange 0-biter som 1-biter. Dermed blir det $(256-70)/2 = 93$ som har færre 0-biter enn 1-biter.

c) $135 = 7\cdot 17 + 16$. Dermed $135 \text{ div } 17 = 7$ og $135 \text{ mod } 17 = 16$.

d) Vi skal ha at

$$(9+8+0+3+0+7+6)+3(7+0+x+2+6+9) \equiv 0 \pmod{10}.$$

Dermed $105+3x \equiv 0 \pmod{10}$. Da må $x=5$.

<u>Oppgave 7</u> a) 5 poeng, b) 5 poeng

a)

1	1. rad
1 1	2. rad
1 2 1	3. rad
1 3 3 1	4. rad
1 4 6 4 1	5. rad

Summen av tallene i 5. rad er $1+4+6+4+1=16=2^4$.
Dette kan også skrives som $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=2^4$.

Summen av tallene i n-te rad er lik:

$$\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}=2^{n-1}.$$

Dette kommer av binomialteoremet som sier at
$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k$. Setter vi $a=b=1$ får vi $2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

Men siden det er n-te rad i Pascals trekant, er det $n-1$ som inngår.

Summen av alle tallene i Pascals trekant til og med n-te rad blir dermed $1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

b) Dette kan løses på mange måter. Vi kan f.eks. finne hvor mange ganger 3 brukes som første siffer, så som andre siffer, osv.

3 som første siffer: $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ ganger

3 som andre siffer: $9 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ ganger

3 som tredje siffer: $9 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 10 = 900$ ganger

3 som fjerde siffer: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 900$ ganger

Tilsammen brukes 3 som siffer 3700 ganger.

Da 0 ikke kan brukes som første siffer, får vi at 0 brukes som siffer $900 + 900 + 900 = 2700$ ganger.

Det er også mulig å bruke utvalgsteknikk. Vi kan først finne antallet firesifrede tall der 0 inngår nøyaktig én gang, så antallet der 0 inngår to ganger og til slutt tre ganger.

Antallet med én 0: $\binom{3}{1} 9 \cdot 9 \cdot 9 = 2187$

Antallet med to 0-er: $\binom{3}{2} 9 \cdot 9 = 243$

Antallet med tre 0-er: $\binom{3}{3} 9 = 9$

Dermed blir svaret: $1 \cdot 2187 + 2 \cdot 243 + 3 \cdot 9 = 2700$.

Det holder å finne et av tallene, dvs. antall 0-er eller antall 3-ere. Det er 0 som skiller seg ut siden første siffer ikke kan være 0. Men sifrene 1 til 9 forekommer like mange ganger. La f.eks. a være antall 0-siffer og b antall av hvert av de ni andre sifrene. Da har vi:

$$a + 9b = 36000$$

siden det er 36000 siffer tilsammen. Hvis vi f.eks. har funnet at $a = 2700$, vil $b = (36000 - 2700)/9 = 3700$.

Det fine med mange av de kombinatoriske oppgavene er at vi kan lage et program som gir oss en "fasit".

Kjør flg. programbit og se hva utskriften blir:

```
public static void main(String[] args)
{
  int[] siffer = new int[10];

  for (int n = 1000; n < 10000; n++)
  {
    int k = n;
    while (k > 0)
    {
      siffer[k % 10]++;
      k /= 10;
    }
  }

  System.out.println(Arrays.toString(siffer));
}
```

Oppgave 8 a) 2 poeng, b) 4 poeng, c) 1 poeng, d) 3 poeng

a) $a_2 = 7a_1 - 10a_0 = 7\cdot 3 - 10\cdot 0 = 21$

$a_3 = 7a_2 - 10a_1 = 7\cdot 21 - 10\cdot 3 = 117$

b) Karakteristisk polynom: $r^2 = 7r - 10$ eller $r^2 - 7r + 10 = 0$.

Røttene: $r = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7\pm 3}{2}$, $r_1 = 5$, $r_2 = 2$

Generell løsning: $a_n = \alpha 5^n + \beta 2^n$

Ligningssystem for å finne α og β:

$$\begin{array}{l|l} \alpha+\beta = a_0 = 0 & \beta = -\alpha \\ 5\alpha + 2\beta = a_1 = 3 & 5\alpha + 2(-\alpha) = 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{array}$$

Løsning: $a_n = 5^n - 2^n$ Innsetting: $a_2 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$
$a_3 = 5^3 - 2^3 = 125 - 8 = 117$

c) $a_0 = 0 = 3 \cdot 0$, $a_1 = 3 \cdot 1$, $a_2 = 3 \cdot 7$, $a_3 = 3 \cdot 39$.

Vi ser at 3 går opp i a_0, a_1, a_2 og a_3.

d) Induksjonsbevis: Vis at 3 går opp i $a_n = 5^n - 2^n$ for alle $n \geq 0$.

Basistrinnet: 3 går opp i $5^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$.

Induksjonstrinnet: Anta at 3 går opp i $5^k - 2^k$ for en $k \geq 0$.

Vi har $5^{k+1} - 2^{k+1} = 5 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^k = 3 \cdot 5^k + 2 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^k$
$= 3 \cdot 5^k + 2(5^k - 2^k)$. Antagelsen gir at 3 går opp i $2(5^k - 2^k)$ og 3 går opp i $3 \cdot 5^k$. Dermed går 3 opp i $5^{k+1} - 2^{k+1}$!

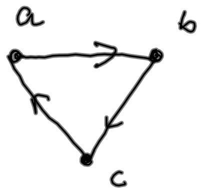
Induksjonsprinsippet gir at 3 går opp i $5^n - 2^n$ for alle $n \geq 0$.

Alternativt bevis:

3 går opp i a_1 og i a_0. Dermed går 3 opp i a_2 siden a_2 er en kombinasjon av a_1 og a_0. 3 går dermed opp i a_3 siden a_3 er en kombinasjon av a_2 og a_1. Osv. til at 3 går opp i a_n siden a_n er en kombinasjon av a_{n-1} og a_{n-2}.

Oppgave 9 a) 2 poeng, b) 2 poeng, c) 2 poeng, d) 4 poeng

a)



b) $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

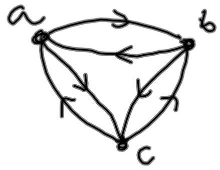
c) $M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) i) Vi må ha med (a,a), (b,b) og (c,c).

ii) Vi må ha med (a,c), (b,a) og (c,b)

iii) Den er allerede antisymmetrisk

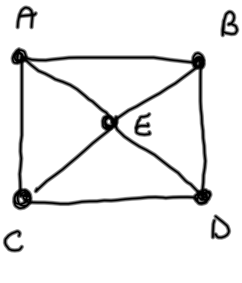
iv) Vi må først ha med (a,c), (b,a) og (c,b). Det gir



Men siden (a,b) og (b,a) er med, må også (a,a) være med. Osv.
Det betyr at alle de ni parene må være med.

Oppgave 10 Hver deloppgave teller 2 poeng.

a)



b) grad $(A) = 3$
grad $(B) = 3$
grad $(C) = 3$
grad $(D) = 3$
grad $(E) = 4$

c) Det å gå gjennom hver dør nøyaktig én gang svarer til en Eulervei i grafen. Men den har ingen Eulervei siden fire av punktene har oddetallsgrad.

d) Ved å sette inn en ytterdør vil graden til et av punktene A, B, C, D bli 4, mens graden til D blir 5. Dermed er det fortsatt fire punkter med oddetallsgrad. Dvs. ingen Eulervei.

e) Setter vi inn en innerdør vil to av punktene A, B, C, D få grad 4, mens de øvrige punktene beholder sine grader. Dermed får vi en åpen Eulervei. Det spiller ingen rolle mellom hvilke to rom som innerdøren settes inn.