HØGSKOLEN I OSLO
OG AKERSHUS

Fakultet for teknologi, kunst og design
Teknologiske fag

Eksamen i: Diskret matematikk

Målform: Bokmål

Dato: 05.12.2013

Tid: 5 timer / kl. 9 - 14

Antall sider (inkl. forside): 9

Antall oppgaver: 10

Tillatte hjelpemidler: Håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig.
Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Besvarelsen skal merkes med kandidatnummer, ikke navn.
Bruk blå eller sort kulepenn på innføringsarket.

Faglig veileder: Ulf Uttersrud

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Instituttleders/ Programkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Instituttleder/ Programkoordinator	
Ulf Uttersrud		Roy Istad		

Emnekode: DAPE1300 – ITPE1300

Alle de 10 oppgavene teller likt. I oppgaver med underpunkter vil krevende og mer omfattende underpunkter kunne telle mer enn lette og enkle underpunkter. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave. **Alle svar skal begrunnes!** Det kan for eksempel skje ved at du tar med mellomregninger eller gir andre former for argumentasjon. **Kun et svar uten noen begrunnelse er normalt verdiløst.**

Oppgave 1

a) La p være utsagnet: *Det snør* og q utsagnet: *Det er kuldegrader*. Sett opp flg. fire utsagn ved hjelp av p, q og logiske operatorer:

   i) Det snør, men det er ikke kuldegrader.
   ii) Hvis det snør, så er det kuldegrader.
   iii) Det snør bare hvis det er kuldegrader.
   vi) Hvis det ikke er kuldegrader, så snør det ikke.

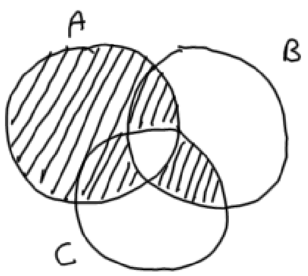
b) La m og n være vilkårlige heltall. Er utsagnet $\forall m \exists n (mn < m^2)$ sant eller usant?

c) La p, q og r være vilkårlige utsagn. Avgjør om utsagnene $(p \wedge q) \to r$ og $(p \to r) \vee (q \to r)$ er logisk ekvivalente.

Oppgave 2

a) Tegn Venn-diagram og skravér mengdene $(A \cup B) - C$ og $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A)$.

b) Finn en mengdeformel med A, B og C for det skraverte området:



c) La A, B og C være mengdene av heltall fra 1 til og med 100 som er delelig med henholdsvis 2, 3 og 5. Finn antallet elementer i mengdene A, $A \cap B$, $(A \cap B) - C$ og $A \cup B \cup C$.

Oppgave 3

Gitt mengden {1,2,3,4,5,6}. Et uordnet utvalg (uten tilbakelegging) på tre tall fra denne mengden, kaller vi et *tre-utvalg*. F.eks. er både {1,3,5} og {2,3,6} tre-utvalg. La A være mengden av alle tre-utvalg. La B være heltallene fra 1 til og med 15. Definér funksjonen $f : A \to B$ ved at for hvert tre-utvalg $a \in A$ skal $f(a)$ være summen av de tre tallene i tre-utvalget. La f.eks. a være tre-utvalget {2,3,6}. Da er $f(a)$ = 2 + 3 + 6 = 11.

a) Hvor mange elementer er det i A, dvs. hvor mange tre-utvalg er det?
b) Finn verdimengden til f ?
c) Skriv opp alle elementene i mengden $\{a \in A \mid f(a) = 10\}$.
d) Er f en-til-en?
e) Er f på?

Oppgave 4

a) Finn summen av tallmatrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Finn matriseproduktet AB av tallmatrisene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Finn summen $7 + 13 + 19 + 25 + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot + 295 + 301$.

d) Tallene 2, 6, 18, 54 og 162 utgjør de fem første leddene i en følge. Hva slags følge kan dette være og hva kan neste ledd være?

Oppgave 5

a) Sett opp desimaltallet 365 på binær og på heksadesimal form.

b) Tallet $a = 777_8$ er gitt på oktal form. Finn $a+1$ på binær, oktal og desimal form.

c) Finn primtallsfaktoriseringen til desimaltallet 1260.

d) Bruk Euklids algoritme til å finne største felles divisor for 189 og 104. Ta med «mellomregningen».

Oppgave 6

a) Finn binomialkoeffisientene $\binom{8}{2}$ og $\binom{8}{3}$.

b) Hvor mange bitsekvenser med lengde 8 har færre 0-biter enn 1-biter?

c) Finn 135 **div** 17 og 135 **mod** 17.

d) De 13 sifrene fra a_1 til a_{13} i en ISBN-13 kode oppfyller flg. kongruens:

$$(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13}) + 3 \cdot (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12}) \equiv 0 (\text{mod} 10)$$

I en bok var et av sifrene i ISBN-13 koden ikke lesbart. Sifferet er her markert med en x: 978-0-0x3-20679-6. Hvilket siffer må x være?

Oppgave 7

a) Første (øverste) rad i Pascals trekant inneholder kun tallet 1. Andre rad inneholder tallene 1 1, tredje rad tallene 1 2 1. Osv. Hva blir summen av tallene i 5-te rad? Hva blir summen av tallene i n-te rad? Hva blir summen av alle tallene i Pascals trekant til og med n-te rad?

b) Gitt at alle tallene fra og med 1000 til og med 9999 er skrevet opp. Hvor mange ganger har da sifferet 3 blitt brukt? Hvor mange ganger har sifferet 0 blitt brukt?

Oppgave 8

Gitt differensligningen $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 3$.

a) Finn a_2 og a_3.

b) Finn en formel for a_n. Vis at formelen din stemmer ved å sette inn n = 2 og 3. Da skal du få de samme resultatene som i punkt a).

c) Vis at 3 går opp i a_n for n = 0, 1, 2 og 3.

d) Vis ved induksjon eller på annen måte at 3 går opp i a_n for alle $n \geq 0$.

Oppgave 9

La $A = \{a,\ b,\ c\}$ og R relasjonen på A gitt ved $R = \{(a,b),(b,c),(c,a)\}$.

a) Tegn grafen G_R til R.

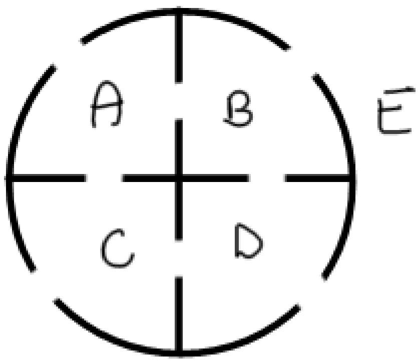
b) Sett opp matrisen M_R til R.

c) Finn det logiske (boolske) matriseproduktet $M_R \odot M_R$.

d) I hvert av følgende spørsmål skal du ta utgangspunkt i R slik den er gitt over. Hvilke par må vi ta med i tillegg for å få:

i) en refleksiv relasjon?
ii) en symmetrisk relasjon?
iii) en antisymmetrisk relasjon?
iv) en transitiv relasjon?

Oppgave 10



Figuren over viser rommene i et sirkelrundt hus. Det er fire rom med navn A, B, C og D. I hvert rom er det et antall dører (markert på figuren med åpninger). For eksempel er det tre dører i rom A. Noen dører går ut av huset (til E) og noen går til andre rom. En dør fra et rom til et annet rom kalles en innerdør og en dør fra et rom og ut kalles en ytterdør.

a) La hvert av rommene (A, B, C, D) og utendørs (E) være punkter i en graf med dørene som kanter mellom punktene. Tegn grafen.

b) Sett opp graden til hvert av de fem punktene i grafen.

(Oppgave 10 fortsetter på neste side)

c) Er det mulig å starte i et av rommene eller eventuelt utendørs og så gå gjennom hver dør nøyaktig én gang?

d) Det planlegges å sette inn en ekstra ytterdør i huset. Vil da svaret på spørsmålet i punkt c) være ja?

e) Det planlegges å sette inn en ekstra innerdør i huset. Vil da svaret på spørsmålet i punkt c) være ja? Mellom hvilke rom kan i så fall døren settes?

Definisjoner og formler

Logiske operatorer:

$\neg$ (ikke), $\wedge$ (og), $\vee$ (eller), $\oplus$ (eksklusiv eller), $\rightarrow$ (implikasjon)

Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $\qquad$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\qquad$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ $\qquad$ $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$ $\qquad$ $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

Noen mengdeidentiteter:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Kardinalitet – antallet elementer i en union:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Funksjoner:

I funksjonen $f: A \to B$ betyr A definisjonsmengde og B verdiområde. En funksjon $f: A \to B$ er en-til-en hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon $f: A \to B$ er på hvis $\forall (b \in B)\, \exists (a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

Matriser

La A være en $m \times n$-matrise. Den transponerte til A betegnes med A^T og er den $n \times m$-matrisen vi får når radene og kolonnene i A byttes om.

Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen), div og mod:

La a være et heltall og d et positivt heltall. Da finnes entydige heltall q og r med $0 \leq r < d$ slik at $a = dq + r$. Operasjonene **div** og **mod** defineres ved at a div $d = q$ og a mod $d = r$.

Moduloregning:

La m være et positivt heltall. To heltall a og b kalles kongruente *modulo* m hvis m går opp i $a - b$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

Summen av rekker:

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^{n} a r^k = a \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$, $r \neq 1$

Aritmetisk rekke: La a være første ledd, b siste ledd og d differensen mellom to og to ledd. Antall ledd n er gitt ved $n = \frac{b-a}{d} + 1$ og summen er lik $\frac{(a+b)n}{2}$

Binomialkoeffisienter:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}, \qquad \binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \qquad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

HØGSKOLEN I OSLO
OG AKERSHUS

Antall forskjellige utvalg på r stykker fra en samling på n stykker:

Ordnet uten tilbakelegging: $n(n-1)\cdots(n-r+1)$

Uordnet uten tilbakelegging: $\binom{n}{r}$

Ordnet med tilbakelegging: n^r

Uordnet med tilbakelegging: $\binom{n+r-1}{r}$

Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:

Hvis N objekter skal plasseres i k bokser, må minst én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

Differensligninger:

Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der c_1 og c_2 er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2 .$$

Hvis det karakteristiske polynomet har to forskjellige reelle løsninger r_1 og r_2, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomet har kun én løsning r_0, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Relasjoner:

En relasjon R på en mengde A er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La R være en relasjon på en mengde A.

R er refleksiv hvis $(a,a) \in R$ for alle $a \in A$.

R er symmetrisk hvis $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \in R$.

R er antisymmetrisk hvis $a \neq b$ og $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \notin R$.

R er transitiv hvis $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$, så er $(a,c) \in R$.

En partisjon

En samling delmengder $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ av en mengde A utgjør en partisjon av A hvis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = A$ og $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$.

Ekvivalensrelasjoner

En relasjon R på en mengde A er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Ekvivalensklasser

Hvis R er en ekvivalensrelasjon på en mengde A og $a \in A$, så er ekvivalensklassen $[a]$ til a definert ved $[a] = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$. Eller med ord: $[a]$ er lik mengden av de $b \in A$ som er relatert til a. Ekvivalensklassene til en relasjon utgjør en partisjon av A.

Delvis- eller partiell ordning

En relasjon R er en delvis ordning hvis den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

Grafteori:

Graden til et punkt. La a være et punkt (eng: vertex) i en urettet graf. Graden $grad(a)$ til a er antallet kanter knyttet til punktet.

Grad-kant-setningen:

La G være en urettet graf med endelig mange kanter. Da vil summen av gradene til punktene i G være dobbelt så stor som antallet kanter.

Eulers setning:

En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en lukket Euler-vei (en Euler-sykel) hvis og bare hvis alle punktene i grafen har partallsgrad.

En sammenhengende urettet graf har en åpen (ikke-lukket) Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to punkter i grafen har oddetallsgrad.