Diskret matematikk – eksamen onsdag 5. desember 2012
Løsningsforslag

Oppgave 1

a) i) $p \wedge q$ ii) $p \to q$ iii) $\neg p \to \neg q$ iv) $q \to p$

b) En direkte løsning:

Hvis $\neg(r \to (p \vee q))$ alltid skal være usant, må $r \to (p \vee q)$ alltid være sant. Men det er ikke mulig siden $r \to (p \vee q)$ er usant hvis r er sann og både p og q er usanne. Med andre ord er $\neg(r \to (p \vee q))$ ikke en selvmotsigelse.

En løsning ved hjelp av sannhetsverditabell:

p	q	r	$p \vee q$	$r \to (p \vee q)$	$\neg(r \to (p \vee q))$
S	S	S	S	S	U
S	S	U	S	S	U
S	U	S	S	S	U
S	U	U	S	S	U
U	S	S	S	S	U
U	S	U	S	S	U
U	U	S	U	U	S
U	U	U	U	S	U

Vi ser at kolonnen for $\neg(r \to (p \vee q))$ inneholder S én gang. Dermed er utsagnet ikke en selvmotsigelse.

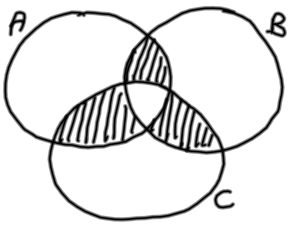
Oppgave 2

a) $A \cup B = \{a,b,c,d\} \cup \{a,b,c\} = \{a,b,c,d\} = A$

$B \cap C = \{a,b,c\} \cap \{b,c,d,e\} = \{b,c\}$

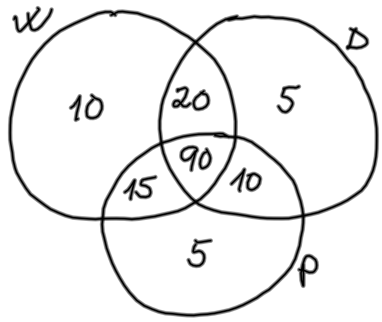
$A - C = \{a,b,c,d\} - \{b,c,d,e\} = \{a\}$

b)



c) La W, D og P være mengdene av de som tar henholdsvis Webprosjekt, Diskret matematikk og Programmering.

Løsning ved hjelp av Venn-diagram:



Diskret matematikk og Programmering, men ikke Webprosjekt: $|D \cap P - W| = 10$

Ingen emner: $160-(90+20+15+10+10+5+5) = 160-155 = 5$

Kun ett emne: $10+5+5 = 20$

Løsning ved hjelp av formler:

$|D \cap P - W| = |D \cap P| - |D \cap P \cap W| = 100-90 = 10$

$$|W \cup D \cup P| = |W|+|D|+|P| - |W \cap D| - |W \cap P| - |D \cap P| + |W \cap D \cap P|$$
$$= 135+125+120-110-105-100+90 = 155$$

Ingen emner: $160-155 = 5$

Kun ett emne: $|W-(D \cup P)| + |D-(W \cup P)| + |P-(W \cup D)|$
$$= 10+5+5 = 20.$$

Vi kan f.eks. finne $|W-(D \cup P)|$ slik:

$$|W-(D \cup P)| = |W| - |W \cap (D \cup P)| = |W| - |(W \cap D) \cup (W \cap P)|$$
$$= |W| - (|W \cap D| + |W \cap P| - |W \cap D \cap P|) = 135-(110+105-90) = 10.$$

Konklusjon: Det er normalt enklest å bruke Venn-diagram i denne typen oppgaver.

Oppgave 3

a) Matriseproduktet av en $m \times n$-matrise og en $n \times k$-matrise blir en $m \times k$-matrise.

b) A er en 3×3-matrise og B en 3×1-matrise. Da vil AB bli en 3×1-matrise.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) C er en 1×3-matrise. Dermed blir CA en 1×3-matrise.

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

d) Tallet 1 kan stå på 3 steder i første rad i en 3×3-matrise. Hvis det er satt en 1-er i første rad, er det 2 steder å plassere en 1-er i andre rad siden det ikke kan være mer enn én 1-er i hver kolonne. Er det plassert 1-ere i første og andre rad, er det kun ett sted å sette en 1-er i tredje rad.

Dermed blir det $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ forskjellige permutasjonsmatriser av dimensjon 3×3.

e) La $D = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. $AD = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix}$

Skal AD bli lik I må $d=1, e=0, f=0, g=0, h=1, i=0, a=0, b=0$ og $c=1$.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

a)

215	107	53	26	13	6	3	1	0
2	1	1	1	0	1	0	1	1

$215_{10} = 11010111_2$

$215_{10} = (1101)(0111)_2 = D7_{16}$

b) $AAA_{16} = 101010101010_2 = 101\ 010\ 101\ 010_2 = 5252_8$

c) Løsning ved hjelp av faktorisering:

$330 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 11$, $252 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7$

Største felles divisor blir derfor $2\cdot 3 = 6$.

Løsning ved hjelp av Euklids algoritme:

a	b	a mod b
330	252	78
252	78	18
78	18	6
18	6	0

Største felles divisor blir 6.

d) Dette er en aritmetisk rekke.

Første ledd $a = 7$, siste ledd $b = 127$, den faste avstanden mellom to ledd er $d = 5$.

Antall ledd $n = \frac{b-a}{d} + 1 = \frac{127-7}{5} + 1 = 24+1 = 25$.

Summen er lik $\frac{(a+b)n}{2} = \frac{134\cdot 25}{2} = 1675$.

Oppgave 5

a) $a_2 = 6a_1 - 8a_0 = 6\cdot 2 - 8\cdot 0 = 12$

$a_3 = 6a_2 - 8a_1 = 6\cdot 12 - 8\cdot 2 = 72 - 16 = 56$

b) Karakteristisk polynom: $r^2 = 6r - 8$, $r^2 - 6r + 8 = 0$

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$r_1 = \frac{6+2}{2} = 4, \quad r_2 = \frac{6-2}{2} = 2$$

Generell løsning av differensligningen: $a_n = \alpha 4^n + \beta 2^n$.

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \alpha 4^0 + \beta 2^0 = \alpha + \beta = 0 \\ a_1 &= \alpha 4^1 + \beta 2^1 = 4\alpha + 2\beta = 2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta &= -1 \end{aligned} \qquad a_n = 4^n - 2^n$$

$a_2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$, $a_3 = 4^3 - 2^3 = 64 - 8 = 56$.

Oppgave 6

a)

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

b) $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$, $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

c) Et utvalg på fem sjokoladebiter skal inneholde runde, avlange og firkantede biter. Det tas som gitt at det i godteriavdelingen er minst fem av hver type.

Dette blir uordnet utvalg siden det kun er antallet av de ulike typene i utvalget som teller. Noen vil kanskje mene at rekkefølgen bitene velges teller og da spesielt hvis bitene spises fortløpende som de velges. Men det høres litt søkt ut. Oppgaveteksten sier at dette foregår i godteriavdelingen i butikken. Når de fem bitene skal betalles i kassen er det nok kun hvor mange det er av hver type som teller.

I forelesningen (og i læreboken) ble utvalg på fire frukter der appelsiner, epler og pærer inngikk, brukt som eksempel.

Her gjelder samme formel som for uordnet utvalg med tilbakelegging. Med $r = 5$ som utvalgsstørrelse og $n = 3$ som antall typer, får vi flg. antall:

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21.$$

Det er også mulig å finne svaret uten formelen. F.eks. slik:

Ingen runde. Da kan det være ingen avlange og fem firkantede, én avlang og fire firkantede, osv. til fem avlange og ingen firkantede. Tilsammen 6 tilfeller.

Én rund bit. Da kan det være ingen avlange og fire firkantede, osv. til fire avlange og ingen firkantede. Tilsammen 5 tilfeller.

To runde biter gir på samme måte 4 tilfeller.

Osv. til fem runde biter som er ett tilfelle.

Til sammen $6+5+4+3+2+1$ utvalg.

Oppgave 7

a) Hver av de fem bokstavene kan være A, B eller C.
Antall forskjellige ABC-ord blir derfor $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^5 = 243$.

b) Det er 3^4 ord der A står først, 3^4 ord der C står sist og 3^3 ord der A står først og C står sist. Antall ord der A står først eller C står sist blir dermed

$$3^4 + 3^4 - 3^3 = 135$$

c) To plasser for A-er kan velges på $\binom{5}{2} = 10$ måter.
På de tre resterende plassene kan det stå B eller C.
Svaret blir dermed $\binom{5}{2}2^3 = 10\cdot 8 = 80$.

d) Det er $2^5 = 32$ ABC-ord som kun inneholder A eller B, 32 som inneholder B eller C og 32 som inneholder A eller C. Summen av dette er 96. Da har vi fått med hvert av ordene AAAAA, BBBBB og CCCCC to ganger. Dermed $96-3 = 93$ ABC-ord som ikke inneholder alle tre.
Det gir $243-93 = 150$ som inneholder alle tre.

Vi kan også finne antallet slik:

Ta ABC-ord der alle de tre bokstavene A, B og C inngår.

3 A-er: $\binom{5}{3}\cdot 2 = 20$, 3 B-er: 20, 3 C-er: 20

2 A-er og 2 B-er: $\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = 10\cdot 3 = 30$

2 A-er og 2 C-er: 30

2 B-er og 2 C-er: 30

Tilsammen: $20+20+20+30+30+30 = 150$.

Oppgave 8

a) $f(10) = 1+0 = 1$, $f(99) = 9+9+18$. Verdimengden kan ikke inneholde tall som er mindre enn 1 eller større enn 18. Lar vi a fortløpende være $10, 20, \dots, 90$ får vi $f(a)$ lik $1, 2, \dots, 9$ og lar vi a fortløpende være $91, 92, \dots, 99$ får vi $f(a) = 10, 11, \dots, 18$. Dermed blir verdimengden $V_f = \{1,2,3,\dots,16,17,18\}$.

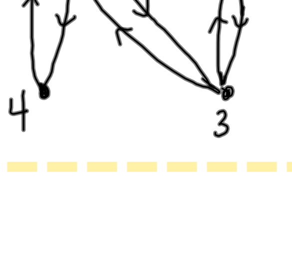
b) Tallene 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82 og 91 har alle 10 som tverrsum. Dermed 9 tall $a \in A$ slik at $f(a) = 10$.

c) f er ikke en-til-en. F.eks. er $f(19) = f(91)$, men $19 \neq 91$. f er ikke på siden $V_f \neq B$.

Oppgave 9

a) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}$

b) Grafen G_R til R:



c) Matrisen M_R til R:

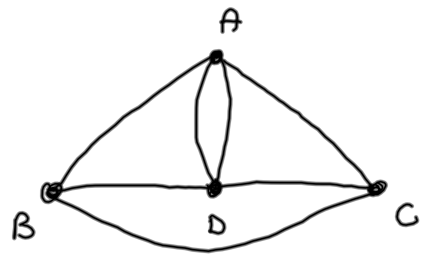
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) R er ikke refleksiv. F.eks. er $(3,3)$ ikke i R.
R er symmetrisk. Hvis $a+b<6$, så er også $b+a<6$.
R er ikke transitiv. Vi har f.eks. at $(4,1)\in R$ og $(1,2)\in R$, men $(4,2)\notin R$ siden $4+2=6$ ikke er mindre enn 6.

e)
$$M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 10

a)



b) grad(A) = 4
grad(B) = 3
grad(C) = 3
grad(D) = 4

c) Det finnes en åpen Eulervei siden grafen har nøyaktig to punkter med oddetallsgrad.
En åpen Eulervei svarer til en spasertur som passerer hver bro nøyaktig én gang. En slik tur må starte i et punkt (området) med oddetallsgrad og ende i det andre punktet (området) med oddetallsgrad.

d) En ny bro mellom A og D vil gjøre at både A og D får grad lik 5. Dermed får alle fire oddetallsgrad og da finnes ingen Eulervei – hverken åpen eller lukket.