HØGSKOLEN I OSLO
OG AKERSHUS

Fakultet for teknologi, kunst og design
Teknologiske fag

Eksamen i: Diskret matematikk

Målform: Bokmål

Dato: 05.12.2012

Tid: 5 timer / kl. 9 - 14

Antall sider (inkl. forside): 9

Antall oppgaver: 10

Tillatte hjelpemidler: Håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig.
Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Besvarelsen skal merkes med kandidatnummer, ikke navn.
Bruk blå eller sort kulepenn på innføringsarket.

Faglig veileder: Ulf Uttersrud

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Instituttleders/ Programkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Instituttleder/ Programkoordinator	
Ulf Uttersrud				

Emnekode: DAPE1300 – ITPE1300 – FO019A – FO019I

HØGSKOLEN I OSLO
OG AKERSHUS

Alle de 10 oppgavene teller likt. I oppgaver med underpunkter vil krevende og mer omfattende underpunkter kunne telle mer enn lette og enkle underpunkter. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave. **Alle svar skal begrunnes!** Det kan for eksempel skje ved at du tar med mellomregninger eller gir andre former for argumentasjon. **Kun et svar uten noen begrunnelse er normalt verdiløst.**

Oppgave 1

a) La utsagnene p og q være gitt ved p : "*Det er kaldt*" og q : "*Jeg fryser*". Skriv flg. utsagn ved hjelp av p , q og logiske operatorer:

i) Det er kaldt og jeg fryser.
ii) Hvis det er kaldt, fryser jeg.
iii) Jeg fryser ikke hvis det ikke er kaldt.
iv) Jeg fryser bare hvis det er kaldt.

b) La p , q og r være logiske utsagn. Et logisk utsagn kalles en selvmotsigelse (eng: contradiction) hvis det alltid er usant. Er det sammensatte utsagnet

$$\neg(r \to (p \vee q))$$

en selvmotsigelse?

Oppgave 2

a) Gitt mengdene $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{a,b,c\}$ og $C = \{b,c,d,e\}$. Finn mengdene $A \cup B$, $B \cap C$ og $A - C$.

b) Lag et Venn-diagram og skraver mengden

$$((A \cap B) - C) \cup ((B \cap C) - A) \cup ((C \cap A) - B).$$

c) I en gruppe på 160 studenter er det 135 som tar Webprosjekt, 125 som tar Diskret matematikk og 120 som tar Programmering. Det er 110 som tar både Webprosjekt og Diskret matematikk, 105 som tar både Webprosjekt og Programmering og 100 som tar både Diskret matematikk og Programmering. Det er 90 som tar alle tre emnene. Hvor mange tar Diskret matematikk og Programmering, men ikke Webprosjekt? Hvor mange tar ingen av de tre emnene? Hvor mange tar kun ett emne?

Oppgave 3

a) Anta at A er en $m \times n$-matrise og B en $n \times k$-matrise. Hvilken dimensjon vil da matriseproduktet AB få?

b) Gitt matrisene $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Hva er dimensjonen til A og B? Finn matriseproduktet AB.

c) La A være matrisen i punkt b) og $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Finn matriseproduktet CA.

d) En kvadratisk matrise der tallet 1 står nøyaktig én gang i hver kolonne og nøyaktig én gang i hver rad og resten av elementene er 0, kalles en permutasjonsmatrise. Matrisen A i punkt b) er en permutasjonsmatrise. Hvor mange forskjellige permutsjonsmatriser av dimensjon 3×3 finnes det?

e) Finn en 3×3-permutasjonsmatrise D slik at matriseproduktet $AD = I$ der

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

a) Finn tallet 215_{10} på binær og heksadesimal form.

b) Tallet AAA_{16} er gitt på heksadesimal form. Finn det på oktal form.

c) Finn største felles divisor for 330 og 252.

d) Finn summen 7 + 12 + 17 + 22 + ... + 122 + 127 .

Oppgave 5

Gitt differensligningen $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$, $n > 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 2$.

a) Finn a_2 og a_3.

b) Finn en formel for a_n. Sjekk at formelen din stemmer ved å sette inn n = 2 og 3. Da skal du få de samme resultatene som i punkt a).

HØGSKOLEN I OSLO
OG AKERSHUS

Oppgave 6

a) De fire første radene i Pascals trekant ser slik ut:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Sett opp de fire neste radene i Pascals trekant slik at det blir til sammen 8 rader.

b) Regn ut binomialkoeffisientene $\binom{7}{2}$ og $\binom{7}{3}$.

c) I godteriavdelingen i butikken kan du velge mellom runde, avlange og firkantede sjokoladebiter. Du ønsker deg fem biter. Hvor mange måter kan du velge det på?

Oppgave 7

Vi kaller et «ord» på fem bokstaver som kun inneholder bokstavene A, B eller C, for et ABC-ord. For eksempel er ABCAB, BBBBA, AAAAA og BCCBB alle ABC-ord.

a) Hvor mange forskjellige ABC-ord finnes det?

b) Hvor mange forskjellige ABC-ord finnes det som har A først eller C sist? For eksempel er AABBB, BACAC og ABBBC av den typen.

c) Hvor mange forskjellige ABC-ord finnes det som inneholder bokstaven A nøyaktig to ganger. For eksempel er ABABC og BCAAC av den typen.

d) Hvor mange forskjellige ABC-ord finnes det der alle de tre bokstavene inngår? For eksempel er ABCAB og BCCAA av den typen.

Oppgave 8

La A være mengden av alle tosifrede positive heltall, dvs. $A = \{10, 11, 12, 13, \ . \ . \ . \ , 99\}$ og B mengden av alle heltall. Funksjonen $f : A \rightarrow B$ er definert ved at $f(a)$ er lik summen av de to sifrene i a. Hvis for eksempel $a = 37$, blir $f(a) = 3 + 7 = 10$ og hvis $a = 90$, blir $f(a) = 9 + 0 = 9$.

a) Hva blir verdimengden til f?

b) Hvor mange tall $a \in A$ er slik at $f(a) = 10$?

c) Er f en-til-en? Er f på?

Oppgave 9

La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og R relasjonen på A gitt ved $R = \{(a,b) \mid a \in A, b \in A, a+b < 6\}$. Det betyr for eksempel at både $(1,4)$ og $(4,1)$ er i R siden $1 + 4 = 4 + 1 < 6$.

a) Sett opp alle parene i R.

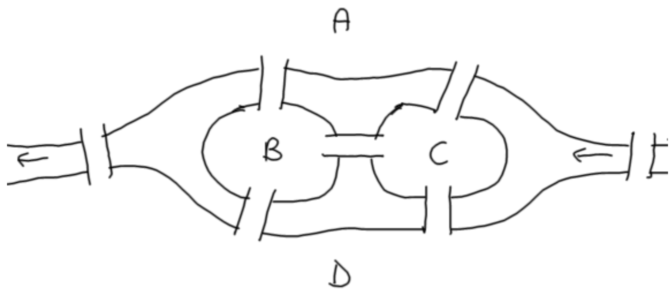
b) Tegn grafen G_R til R.

c) Sett opp matrisen M_R til R.

d) Er R refleksiv? Er R symmetrisk? Er R transitiv?

e) Finn det logiske (boolske) matriseproduktet $M_R \odot M_R$.

Oppgave 10



Gjennom Eulerby renner elven Diskret. I elven er det to øyer og det er syv broer som binder områdene sammen. En bro er markert med to parallelle streker. Pilene viser hvilken vei vannet renner.

a) Sett opp dette som en graf. La hvert av de fire områdene A, B, C og D være punkter i grafen. La broene være kanter mellom punktene.

b) Sett opp graden til hvert av de fire punktene i grafen.

c) Det påstås at det er mulig å starte en spasertur i et av de fire områdene og så gå over hver bro nøyaktig én gang. Er det mulig? Hvis ja, hvor kan da en slik spasertur starte og ende?

d) En ny bro over elven mellom områdene A og D er under bygging. Den kommer nedenfor broen lengst til venstre. Vil det, når den er ferdig, være mulig å ta en spasertur der alle broene (nå åtte stykker) passeres nøyaktig én gang?

HØGSKOLEN I OSLO
OG AKERSHUS

Definisjoner og formler

Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $\quad$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\quad$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ $\quad$ $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$ $\quad$ $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

Noen mengdeidentiteter:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\quad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Kardinalitet – antallet elementer i en union:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Funksjoner:

I funksjonen $f : A \rightarrow B$ betyr A definisjonsmengde og B verdiområde. En funksjon $f : A \rightarrow B$ er en-til-en hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon $f : A \rightarrow B$ er på hvis $\forall (b \in B)\, \exists (a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

Matriser

La A være en $m \times n$-matrise. Den transponerte til A betegnes med A^T og er den $n \times m$-matrisen vi får når radene og kolonnene i A byttes om.

Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen), div og mod:

La a være et heltall og d et positivt heltall. Da finnes entydige heltall q og r med $0 \leq r < d$ slik at $a = dq + r$. Operasjonene **div** og **mod** defineres ved at a div $d = q$ og $a \bmod d = r$.

Moduloregning:

La m være et positivt heltall. To heltall a og b kalles kongruente *modulo* m hvis m går opp i $a-b$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

Summen av rekker:

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^{n} a r^k = a\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$, $r \neq 1$

Aritmetisk rekke: La a være første ledd, b siste ledd og d differensen mellom to og to ledd. Antall ledd n er gitt ved $n = \frac{b-a}{d} + 1$ og summen er lik $\frac{(a+b)n}{2}$

Binomialkoeffisienter:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}, \qquad \binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \qquad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Antall forskjellige utvalg på r stykker fra en samling på n stykker:

Ordnet uten tilbakelegging:	$n(n-1)\cdots(n-r+1)$
Uordnet uten tilbakelegging:	$\binom{n}{r}$
Ordnet med tilbakelegging:	n^r
Uordnet med tilbakelegging:	$\binom{n+r-1}{r}$

Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:

Hvis N objekter skal plasseres i k bokser, må minst én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

HØGSKOLEN I OSLO OG AKERSHUS

Differensligninger:

Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der c_1 og c_2 er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2 .$$

Hvis det karakteristiske polynomet har to forskjellige reelle løsninger r_1 og r_2, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomet har kun én løsning r_0, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Relasjoner:

En relasjon R på en mengde A er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La R være en relasjon på en mengde A.

R er refleksiv hvis $(a,a) \in R$ for alle $a \in A$.

R er symmetrisk hvis $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \in R$.

R er antisymmetrisk hvis $a \neq b$ og $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \notin R$.

R er transitiv hvis $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$, så er $(a,c) \in R$.

En partisjon

En samling delmengder A_1, A_2, A_3, . . . , A_n av en mengde A utgjør en partisjon av A hvis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ . \ . \ . \cup A_n = A$ og $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$.

HØGSKOLEN I OSLO
OG AKERSHUS

Ekvivalensrelasjoner

En relasjon R på en mengde A er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Ekvivalensklasser

Hvis R er en ekvivalensrelasjon på en mengde A og $a \in A$, så er ekvivalensklassen $[a]$ til a definert ved $[a] = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$. Eller med ord: $[a]$ er lik mengden av de $b \in A$ som er relatert til a. Ekvivalensklassene til en relasjon utgjør en partisjon av A.

Delvis- eller partiell ordning

En relasjon R er en delvis ordning hvis den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

Grafteori:

Graden til et punkt. La a være et punkt (eng: vertex) i en urettet graf. Graden $grad(a)$ til a er antallet kanter knyttet til punktet.

Grad-kant-setningen:

La G være en urettet graf med endelig mange kanter. Da vil summen av gradene til punktene i G være dobbelt så stor som antallet kanter.

Eulers setning:

En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en lukket Euler-vei (en Euler-sykel) hvis og bare hvis alle punktene i grafen har partallsgrad.

En sammenhengende urettet graf har en åpen (ikke-lukket) Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to punkter i grafen har oddetallsgrad.