

Eksamen i Diskret matematikk 7. desember 2011

LøsningsforslagOppgave 1a) i) $p \wedge \neg q$ ii) $\neg q \rightarrow p$ iii) $\neg p \rightarrow q$

b) sannhetsverditabell:

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
S	S	S	U	S	U	S
S	S	U	U	S	U	S
S	U	S	U	U	U	U
S	U	U	U	U	U	U
U	S	S	S	U	S	S
U	S	U	S	U	U	U
U	U	S	S	U	S	S
U	U	U	S	U	U	U

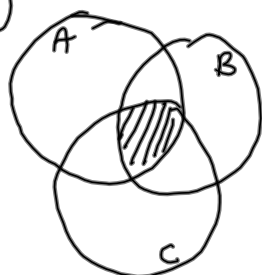
Vi ser av tabellen at $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$ er sann i radene 1, 2, 5 og 7, dvs. for fire tilfeller:

(S, S, S) , (S, S, U) , (U, S, S) og (U, U, S) .

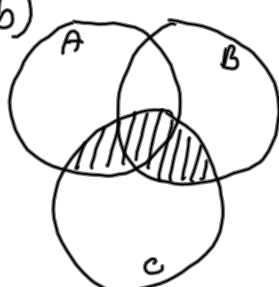
Det kunne vi ha sett direkte fra $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$. Vi ser at hvis både p og q er sanne, vil uttrykket bli sant uavhengig av r . Videre at hvis p er usann (dvs. $\neg p$ sann) og r er sann, vil uttrykket bli sant uavhengig av q . Vi ser også at uttrykket blir usant i resten av tilfellene.

Oppgave 2

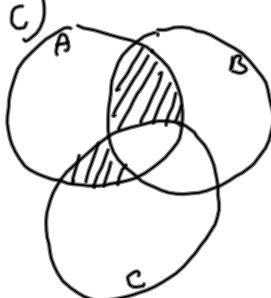
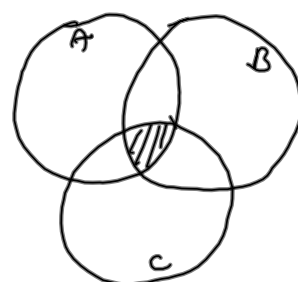
a)

 $A \cap B \cap C$ ///

b)

 $(A \cap B) \cap C$ ///

c)

 $A \cap (B \oplus C)$ ///
 $(A - (B \oplus C)) \cap B$ ///
 $= A \cap B \cap C$

Oppgave 3

a) A har 2 rader og 3 kolonner.

b) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A + A^T$ gir ikke mening. Addisjon av matriser er kun definert i de tilfellene at de har samme dimensjon. Her er A en 2×3 -matrise og A^T en 3×2 -matrise. De har dermed ikke samme dimensjon.

d) $AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

Oppgave 4

a) $a = 00011110_2 = 16 + 8 + 4 + 2 = 30_{10}$
 $b = 00111100_2 = 32 + 16 + 8 + 4 = 60_{10}$

b)
$$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ \hline 25 & 0 \\ 12 & 1 \\ 6 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 50_{10} = 00110010_2 \\ \text{Vi kan finne } 100_{10} \text{ p\aa denne formen} \\ \text{ved f.eks. bitforskyving i } 50_{10}: \\ 100_{10} = 01100100_2 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcl} 50_{10} & = & 00110010_2 \\ \text{komplement} & & 11001101_2 \\ + 1 & & 1 \\ \hline -50_{10} & = & 11001110_2 \\ -100_{10} & = & 10011100_2 \text{ (bitforskyving)} \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rcl} -50_{10} & = & 11001110_2 \\ -100_{10} & = & 10011100_2 \\ \hline & = & 01101010_2 = 106_{10} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Summen blir positiv s\aa den} \\ \text{forbrynsken blir 0.} \end{array}$$

Oppgave 5

a) Det er $7! = 5040$ permutasjoner av tallene fra 1 til 7.

b) La A være mengden av de permutasjonene der 1 står først og B de der 7 står sist.

Vi skal finne antallet i $A \cup B$, dvs $|A \cup B|$.

$$\text{Vi har } |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Hvis 1 står først, kan de 6 andre permuteres på $6! = 720$ måter. Dermed $|A| = 720$. På samme måte får vi at $|B| = 720$. Hvis 1 står først og 7 sist, kan resten av tallene permuteres på $5! = 120$ måter. Dermed $|A \cap B| = 120$.

$$\text{Vi får } |A \cup B| = 720 + 720 - 120 = 1320.$$

c) Ja, siden det er 29 mulige forbokstaver og 30 studenter må minst to studenter ha samme forbokstav i sine fornavn (the pigeon hole principle).

d) De to A-ene kan stå på $\binom{4}{2}$ steder. På resten av stedene må B-ene stå. Altså $\binom{4}{2} = 6$ forskjellige "ord".

Oppgave 6

$$a) a_2 = a_1 + 6a_0 = 8 + 6 = 14, \quad a_3 = a_2 + 6a_1 = 14 + 48 = 62$$

b) Det karakteristiske polynomet $\pi^2 = \pi + 6$, $\pi^2 - \pi - 6 = 0$ har røttene $\pi_1 = 3$ og $\pi_2 = -2$. Generell løsning blir dermed lik

$$a_n = \alpha 3^n + \beta (-2)^n$$

Tallene α og β finnes ved hjelp av $\alpha + \beta = 1$ og $3\alpha - 2\beta = 8$.

Det gir $\alpha = 2$ og $\beta = -1$. Løsningen blir dermed:

$$a_n = 2 \cdot 3^n - (-2)^n$$

$$c) a_8 = 2 \cdot 3^8 - (-2)^8 = 2 \cdot 6561 - 256 = 12866$$

OBS: Det er mulig å finne a_8 uten å ha funnet en formel for a_n . Da kan en fortløpende finne a_4, a_5 , osv. på samme måte som i punkt a).

$$d) a_0 + a_1 = 1 + 8 = 9$$

$$a_0 + a_1 + a_2 = 1 + 8 + 14 = 23$$

$$a_0 + a_1 + a_3 + a_4 = 1 + 8 + 14 + 62 = 85$$

$$s_m = \sum_{k=0}^m a_k = \sum_{k=0}^m (2 \cdot 3^k - (-2)^k) = \sum_{k=0}^m 2 \cdot 3^k - \sum_{k=0}^m (-2)^k$$

$$= 2 \frac{3^{m+1} - 1}{3 - 1} - \frac{(-2)^{m+1} - 1}{-2 - 1} = 3^{m+1} - 1 + \frac{1}{3} ((-2)^{m+1} - 1)$$

$$= 3^{m+1} + \frac{1}{3} (-2)^{m+1} - \frac{4}{3}$$

$$\text{Test: } s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3^4 + \frac{1}{3} (-2)^4 - \frac{4}{3} =$$

$$= 81 + \frac{1}{3} 16 - \frac{4}{3} = 81 + \frac{12}{3} = 81 + 4 = 85$$

Oppgave 7

$$a) \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28, \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56, \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$$

$$b) 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 2^3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \\ = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

c) Grunnfallet i det oktale tallsystemet er 8. Det blir dermed like mange 0-er bakerst i $8!$ skrevet på oktal form som antallet ganger 8 går opp i $8!$. Primtallsfaktoriseringen inneholder 2^7 . Derfor vil $8 = 2^3$ gå opp 2 ganger i $8!$. Med andre ord blir det 2 0-er bakerst. Forøvrig har vi at $8! = 40320_{10} = 116600_8$.

d) Euklids algoritme: $8! = 40320$

a	b	r
40320	40306	14
40306	14	0

Største felles divisor er 14.

Oppgave 8

a) Det er $2^{10} = 1024$ forskjellige bitsekvenser med lengde 10.

b) $V_f = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ siden en bitsekvens med lengde 10 kan ha fra 0 til 10 0-biter.

f er ikke en-til-en fordi f.eks. bitsekvensene $a = 1111100000$ og $b = 0000011111$ er ulike, men de har like mange 0-biter, dvs. $a \neq b$, men $f(a) = f(b)$. f er ikke på siden B er de ikke-negative heltallene og dermed at $V_f \neq B$.

c) $|C|$ er lik antallet bitsekvenser som har 4 0-biter.

Vi kan plassere de 4 0-bitene på $\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ måter. Restene av bitene må da være 1-biter. Dermed $|C| = 210$.

d) C er mengden av de bitsekvensene som har 4 0-biter og dermed 6 1-biter.

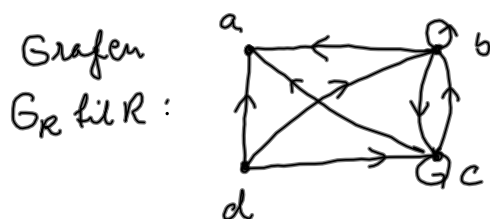
Vi setter først opp 6 1-biter på rad:

1 1 1 1 1 1

For ikke å få to 0-biter ved siden av hverandre, kan det stå en 0-bit lengst til venstre, en lengst til høyre eller mellom to 1-biter. Til sammen 7 steder. Vi kan plassere 4 0-biter på $\binom{7}{4} = 35$ måter på disse 7 stedene. Svaret er dermed 35.

Oppgave 9

- a) Mengden $A \times A$ har $4 \cdot 4 = 16$ par.
- b) Det er 4 par med a først og dermed $16 - 4 = 12$ der a ikke er først. Det er 4 par med a først, 4 par med d sist og 1 par med a først og d sist. Dermed $4 + 4 - 1 = 7$ par med a først eller d sist. De Morgans lov gir at det blir $16 - 7 = 9$ par der a ikke er først og d ikke er sist.
- c) $R = \{(b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, a), (d, b), (d, c)\}$



Matrisen M_R
 til R :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- d) R er ikke refleksiv siden f.eks. (a, a) mangler.
 R er ikke symmetrisk siden (b, a) er med, men ikke (a, b) .
 R er ikke antisymmetrisk siden det går på begge veier mellom b og c .
- e) Vi finner fort at $M_R \odot M_R = M_R^{[2]} = M_R$ og dermed at $M_R^{[3]} = M_R$.
 Det betyr at vi må ha med alle parene fra R .

Oppgave 10

- a) Grafen har 8 punkter.
 $\text{grad}(A) = 2, \text{grad}(B) = 4, \text{grad}(C) = 4, \text{grad}(D) = 5,$
 $\text{grad}(E) = 4, \text{grad}(F) = 4, \text{grad}(G) = 4, \text{grad}(H) = 3.$
- b) Grad-kant-setningen sier at summen av gradene til punktene i grafen er det dobbelte av antall kanter. Der er det $(2 + 4 + 4 + 5 + 4 + 4 + 4 + 3)/2 = 30/2 = 15$ kanter.
- c) Det finnes ingen lukket Euler-vei siden ikke alle punktene har partallsgrad ($\text{grad}(D) = 5$ og $\text{grad}(H) = 3$). Det finnes en åpen Euler-vei siden maksimalt to punkter (D og H) har oddetallsgrad.
- d) Vi må starte i D eller H . F.eks. denne:
 $H-E-B-A-C-G-H-F-E-D-B-C-D-G-F-D$