HØGSKOLEN I OSLO
OG AKERSHUS

Fakultet for teknologi, kunst og design
Teknologiske fag

Eksamen i: Diskret matematikk

Målform: Bokmål

Dato: 07.12.2011

Tid: 5 timer / kl. 9 - 14

Antall sider (inkl. forside): 9

Antall oppgaver: 10

Tillatte hjelpemidler: Håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig.
Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Besvarelsen skal merkes med kandidatnummer, ikke navn.
Bruk blå eller sort kulepenn på innføringsarket.

Faglig veileder: Ulf Uttersrud

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Instituttleders/ Fagkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Instituttleder/ Fagkoordinator	
Ulf Uttersrud		Roy Istad		

Emnekode: FO019A – FO019I

HØGSKOLEN I OSLO
OG AKERSHUS

Alle de 10 oppgavene teller likt. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave. **Alle svar skal begrunnes!** Det kan for eksempel skje ved at du tar med mellomregninger eller gir andre former for argumentasjon. **Kun et svar uten noen begrunnelse er normalt verdiløst.**

Oppgave 1

a) La utsagnene p og q være gitt ved p: "*Jeg er flink i matematikk*" og q: "*Jeg er svak i programmering*". Skriv flg. utsagn ved hjelp av p, q og logiske operatorer:

i) Jeg er flink i matematikk og jeg er ikke svak i programmering.
ii) Hvis jeg ikke er svak i programmering, så er jeg flink i matematikk.
iii) Jeg er svak i programmering hvis jeg ikke er flink i matematikk.

b) Avgjør for hvilke verdier av p, q og r utsagnet $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$ er sant.

Oppgave 2

La A, B og C være vilkårlige mengder. Symbolet $\oplus$ står for eksklusiv union (eller symmetrisk differens). For eksempel har vi at $B \oplus C = (B - C) \cup (C - B)$. Tegn Venn-diagram og skravér mengden i hvert av følgende tilfeller:

a) $A \cap B \cap C$.
b) $(A \cup B) \cap C$.
c) $A \cap (B \oplus C)$.
d) $(A - (B \oplus C)) \cap B$. Skriv $(A - (B \oplus C)) \cap B$ på en enklere form.

Oppgave 3

Gitt tallmatrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Hvor mange rader og kolonner har A?

b) Finn A^T, dvs. finn den transponerte til A.

c) Gir $A + A^T$ mening?

d) Regn ut matriseproduktet AA^T, dvs. produktet av A og A^T.

Oppgave 4

I denne oppgaven skal det brukes et fast bitformat på 8 biter, to-komplement og fortegnsbit for representasjon av tall på binærform. Hvis to tall adderes (binær addisjon), kan resultatet få ni siffer. I så fall beholdes kun de siste åtte av dem. Det å gange med 2 blir her det samme som å forskyve de binære sifrene én enhet mot venstre, dvs. biten lengst til venstre fjernes og en 0-bit legges til på høyre side. For eksempel vil en bitforskyvning på én enhet mot venstre i 00011110 gi 00111100.

a) Finn tallene $a = 00011110_2$ og $b = 00111100_2$ på desimalform.

b) Finn 50_{10} og 100_{10} på binær form i dette formatet.

c) Finn -50_{10} og -100_{10} på binær form i dette formatet.

d) Finn summen $(-50_{10}) + (-100_{10})$ på binær form (i dette formatet) ved hjelp av binæraddisjon og resultatet fra punkt c). Blir summen positiv eller negativ?

Oppgave 5

a) Hvor mange permutasjoner er det av tallene fra 1 til 7?
b) Hvor mange permutasjoner er det av tallene fra 1 til 7 som har 1 først eller 7 sist?
c) Er det sant at i en klasse på 30 studenter har minst to av dem fornavn med samme forbokstav?
d) Hvor mange «ord» kan vi lage ved å stokke om bokstavene i ABBA.

Oppgave 6

Gitt differensligningen $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, $n > 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = 8$.

a) Finn a_2 og a_3 .

b) Finn en formel for a_n .

c) Finn a_8 .

d) Finn summene $a_0 + a_1$, $a_0 + a_1 + a_2$ og $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$. Finn en formel for summen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n \geq 1$.

Oppgave 7

a) Regn ut binomialkoeffisientene $\binom{8}{2}$, $\binom{8}{3}$ og $\binom{8}{5}$.

b) Finn primtallfaktoriseringen av $8!$ (dvs. 8 fakultet).

c) Hvor mange 0-siffer vil det bli på slutten av tallet $8!$ hvis det skrives med oktale siffer?

d) Finn største felles divisor for $8!$ og 40306.

Oppgave 8

La A være mengden av alle bitsekvenser med lengde 10 og la B være de ikke-negative heltallene. La funksjonen $f : A \to B$ være definert ved at for hver $a \in A$ er $f(a)$ lik antall 0-biter i bitsekvensen a. Hvis for eksempel $a = 1011011001$, er $f(a) = 4$ og hvis $a = 0010010101$, er $f(a) = 6$.

a) Hvor mange elementer har A, dvs. hvor mange forskjellige bitsekvenser med lengde 10 finnes det?

b) Hva blir verdimengden til f? Er f en-til-en? Er f på?

c) La C være delmengden av A gitt ved $C = \{a \in A \mid f(a) = 4\}$. Hvor mange elementer er det i C?

d) Hvor mange av bitsekvensene i C er det som ikke har to 0-biter ved siden av hverandre. For eksempel har 1010011101 to 0-biter ved siden av hverandre, mens 0101101101 ikke har det.

Oppgave 9

Gitt $A = \{a, b, c, d\}$. Mengden $A \times A$ er mengden av par der første og andre element i paret hentes fra mengden A. For eksempel er (a,b), (d,c) og (b,b) tre slike par.

a) Hvor mange par har mengden $A \times A$?

b) Hvor mange par fra $A \times A$ er det der a **ikke** er først? Hvor mange er det der a **ikke** er først og d **ikke** er sist?

HØGSKOLEN I OSLO OG AKERSHUS

Oppgave 9 fortsetter her:

La relasjonen R på A bestå av de parene fra $A \times A$ der a ikke er først og d ikke er sist. Det betyr for eksempel at $(b,a) \in R$, men at $(a,a) \notin R$.

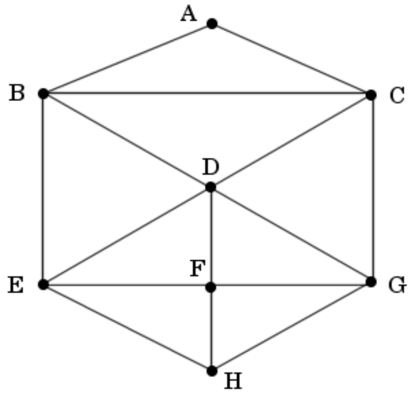
c) Sett opp relasjonen R som en mengde av par og sett så opp grafen og matrisen til R. Hint: Hvis du er usikker på hva R skal inneholde, kan du først finne alle parene i $A \times A$ og så fjerne de som ikke skal være med.

d) Er R refleksiv? Er R symmetrisk? Er R antisymmetrisk?

e) Sett opp de parene fra $A \times A$ som er slik at det går en vei i grafen til R med lengde 3 fra det første elementet i paret til det andre elementet i paret.

Oppgave 10

Gitt følgende urettede graf:



a) Hvor mange punkter har grafen? Skriv opp graden til hvert punkt i grafen og finn summen av gradene.

b) Bruk resultatet i punkt a) til å finne antallet kanter i grafen.

c) Finnes det en lukket Euler-vei i grafen? Finnes det en åpen Euler-vei i grafen?

d) Skriv opp veien (dvs. punktene på veien) hvis ditt svar er ja på et av spørsmålene i punkt c).

HØGSKOLEN I OSLO
OG AKERSHUS

Definisjoner og formler

Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $\quad$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\quad$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$p \to q \equiv \neg p \vee q$ $\quad$ $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$ $\quad$ $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

Noen mengdeidentiteter:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\quad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Kardinalitet – antallet elementer i en union:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Funksjoner:

I funksjonen $f : A \to B$ betyr A definisjonsmengde og B verdiområde. En funksjon $f : A \to B$ er en-til-en hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon $f : A \to B$ er på hvis $\forall (b \in B)\, \exists (a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

Matriser

La A være en $m \times n$-matrise. Den transponerte til A betegnes med A^T og er den $n \times m$-matrisen vi får når radene og kolonnene i A byttes om.

Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen), div og mod:

La a være et heltall og d et positivt heltall. Da finnes entydige heltall q og r med $0 \leq r < d$ slik at $a = dq + r$. Operasjonene **div** og **mod** defineres ved at a div $d = q$ og $a \bmod d = r$.

HØGSKOLEN I OSLO OG AKERSHUS

Moduloregning:

La m være et positivt heltall. To heltall a og b kalles kongruente *modulo* m hvis m går opp i $a-b$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

Rekker:

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^{n} a r^k = a\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$, $r \neq 1$

Aritmetisk rekke: Summen av første og siste ledd ganget med antall ledd, delt med 2.

Binomialkoeffisienter:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}\ , \qquad \binom{n}{0} = 1\ , \qquad \binom{n}{1} = n\ , \qquad \binom{n}{n} = 1\ ,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}\ , \qquad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

Antall forskjellige utvalg på r stykker fra en samling på n stykker:

Ordnet uten tilbakelegging: $n(n-1)\cdots(n-r+1)$

Uordnet uten tilbakelegging: $\binom{n}{r}$

Ordnet med tilbakelegging: n^r

Uordnet med tilbakelegging: $\binom{n+r-1}{r}$

Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:

Hvis N objekter skal plasseres i k bokser, må minst én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

Differensligninger:

Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der c_1 og c_2 er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2 .$$

Hvis det karakteristiske polynomet har to forskjellige reelle løsninger r_1 og r_2, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomet har kun én løsning r_0, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Relasjoner:

En relasjon R på en mengde A er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La R være en relasjon på en mengde A.

R er refleksiv hvis $(a,a) \in R$ for alle $a \in A$.

R er symmetrisk hvis $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \in R$.

R er antisymmetrisk hvis $a \neq b$ og $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \notin R$.

R er transitiv hvis $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$, så er $(a,c) \in R$.

En partisjon

En samling delmengder A_1, A_2, A_3, . . . , A_n av en mengde A utgjør en partisjon av A hvis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ . \ . \ . \ \cup A_n = A$ og $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$.

Ekvivalensrelasjoner

En relasjon R på en mengde A er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

HØGSKOLEN I OSLO
OG AKERSHUS

Ekvivalensklasser

Hvis R er en ekvivalensrelasjon på en mengde A og $a \in A$, så er ekvivalensklassen $[a]$ til a definert ved $[a] = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$. Eller med ord: $[a]$ er lik mengden av de $b \in A$ som er relatert til a. Ekvivalensklassene til en relasjon utgjør en partisjon av A.

Delvis- eller partiell ordning

En relasjon R er en delvis ordning hvis den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

Grafteori:

Graden til et punkt. La a være et punkt (eng: vertex) i en urettet graf. Graden $grad(a)$ til a er antallet kanter knyttet til punktet.

Grad-kant-setningen:

La G være en urettet graf med endelig mange kanter. Da vil summen av gradene til punktene i G være dobbelt så stor som antallet kanter.

Eulers setning:

En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en lukket Euler-vei (en Euler-sykel) hvis og bare hvis alle punktene i grafen har partallsgrad.

En sammenhengende urettet graf har en åpen (ikke-lukket) Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to punkter i grafen har oddetallsgrad.