Eksamen i Diskret matematikk 7. desember 2010

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) i) $q \wedge \neg p$ ii) $p \rightarrow \neg q$ iii) $\neg p \wedge \neg q$

b) Dette kan vises ved hjelp av formler:

$$
\begin{aligned}
& (p \vee q) \rightarrow r \\
\equiv\ & \neg(p \vee q) \vee r && \text{omregningsformel} \\
\equiv\ & (\neg p \wedge \neg q) \vee r && \text{DeMorgans lov} \\
\equiv\ & (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) && \text{distributiv lov} \\
\equiv\ & (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) && \text{omregningsformel}
\end{aligned}
$$

Vi ser at $(p \vee q) \rightarrow r$ er ekvivalent med $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$.

Ved hjelp av sannhetsverditabell:

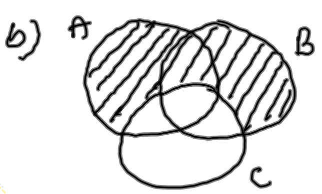
p	q	r	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$(p \vee q) \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	U	S	U	U	U	U
S	U	S	S	S	S	S	S
S	U	U	S	U	S	U	U
U	S	S	S	S	S	S	S
U	S	U	S	S	U	U	U
U	U	S	U	S	S	S	S
U	U	U	U	S	S	S	S

De to siste kolonnene er like. Dermed er utsagnene ekvivalente.

Oppgave 2

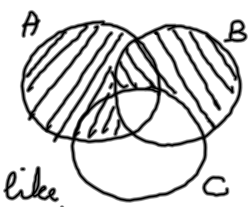
a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A \cap B = \{c, d\}$, $A - B = \{a, b\}$

b)



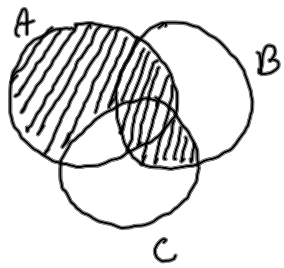
$(A \cup B) - C$

De er ikke like



$A - B$ $B - C$

$(A - B) \cup (B - C)$ er den skraverte delen

c) 

kan f.eks. skrives som $(A - C) \cup (B \cap C)$

Oppgave 3

a) Summen av tallene i A blir $(1+1000)1000/2 = 500500$.

b) $1000 \text{ div } 7 = \lfloor 1000/7 \rfloor = 142$ av dem er delelig med 7.

c) La B være de tallene fra A som er delelig med 4 og C de som er delelig med 7. Da har vi

$$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$$

$$|B| = 1000 \text{ div } 4 = \lfloor 1000/4 \rfloor = 250$$
$$|C| = 1000 \text{ div } 7 = \lfloor 1000/7 \rfloor = 142$$
$$|B \cap C| = 1000 \text{ div } 28 = \lfloor 1000/28 \rfloor = 35$$

Dermed blir antallet tall fra A som er delelig med 4 eller 7 lik $250 + 142 - 35 = 357$.

c) Summen av de som er delelig med 4:

$$(4+1000) \cdot 250/2 = 125500$$

Summen av de som er delelig med 7:

$$(7+994) \cdot 142/2 = 71071$$

Summen av de som er delelig med 4 og 7, dvs. med 28:

$$(28+980) \cdot 35/2 = 17640$$

Summen av de som er delelig med 4 eller 7:

$$125500 + 71071 - 17640 = 178931.$$

Oppgave 4

a) $f(A) = \det(A) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1$

$f(B) = \det(B) = \det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\cdot 1 - 1\cdot 1 = 1$

b) Funksjonen f er ikke en-til-en siden $f(A) = f(B)$ og $A \neq B$.

La $k \in \mathbb{Z}$, dvs. k et vilkårlig heltall. La C være den heltallige 2×2-matrisen

$$C = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da er C med i definisjonsmengden Δ, dvs. $C \in \Delta$.
Vi har $f(C) = \det(C) = \det\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = k\cdot 1 - 0\cdot 0 = k$.
Dette viser at funksjonen f er på.

Oppgave 5

a) i) $1^5 - 1 = 1 - 1 = 0$, 5 går opp i 0
ii) $2^5 - 2 = 32 - 2 = 30$, 5 går opp i 30
iii) $3^5 - 3 = 243 - 3 = 240$, 5 går opp i 240

Dette viser at P_n er sann for $n = 1, 2$ og 3.

b)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Binomialteoremet (se vedlegget) sier at

$$(n+1)^5 = \binom{5}{0}n^5 + \binom{5}{1}n^4 + \binom{5}{2}n^3 + \binom{5}{3}n^2 + \binom{5}{4}n + \binom{5}{5}$$

Binomialkoeffisientene $\binom{5}{0}, \binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}$ og $\binom{5}{5}$ utgjør den 6. raden i Pascals trekant. Dermed blir

$$(n+1)^5 = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1, \text{ dvs.}$$

$$a = 5, \ b = 10, \ c = 10 \text{ og } d = 5.$$

c) Basistrinnet: P_1 er sann (se punkt a))

Induksjonstrinnet: Anta at P_k er sann for en $k \geq 1$, dvs. at 5 går opp i $k^5 - k$. Vi må vise at P_{k+1} er sann, dvs. at 5 går opp i $(k+1)^5 - (k+1)$.

Vi har $(k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1$
$= k^5 - k + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$. Induksjonsantagelsen sier at 5 går opp i $k^5 - k$. Videre har vi at 5 går opp i $5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$. Dermed går 5 opp i summen, dvs. 5 går opp i $(k+1)^5 - (k+1)$. Det betyr at P_{k+1} er sann.

Induksjonsprinsippet gir derfor at P_n er sann for alle $n \geq 1$.

OBS Det at $n^5 - n \equiv 0 \pmod 5$ for alle $n \geq 1$ er et spesialtilfelle av Fermat's lille teorem. Det sier at hvis p er et primtall, så er $n^p - n \equiv 0 \pmod p$ for alle $n \geq 1$.

Er $n^5 - n \equiv 0 \pmod{30}$ sant for alle $n \geq 1$?

Vi har $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2-1)(n^2+1)$
$= (n-1)n(n+1)(n^2+1)$. Tallene $n-1$, n og $n+1$ er tre tall på rad. Det betyr at 2 går opp i minst ett av dem og at 3 går opp i et av dem. Vi har jo at i tallrekken vil 2 gå opp i hvert andre tall og 3 i hvert tredje tall. Dermed går $2 \cdot 3 = 6$ opp i $n^5 - n$ for $n \geq 1$. Fra før har vi at 5 går opp. Dermed vil $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ gå opp i $n^5 - n$ for $n \geq 1$.

Oppgave 6

a) $a_2 = 5a_1 - 6a_0 = 5\cdot 1 - 6\cdot 0 = 5$

$a_3 = 5a_2 - 6a_1 = 5\cdot 5 - 6\cdot 1 = 25 - 6 = 19.$

b) Det karakteristiske polynomet: $r^2 = 5r - 6$,

$r^2 - 5r + 6 = 0$, $r = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 6}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$

$r_1 = 3$, $r_2 = 2$.

Generell løsning: $a_n = \alpha 3^n + \beta 2^n$.

Vi finner α og β ved:

$$\alpha + \beta = 0$$
$$3\alpha + 2\beta = 1$$

Dette gir $\alpha = 1$ og $\beta = -1$. Dermed får vi løsningen

$$a_n = 3^n - 2^n$$

c) $a_{10} = 3^{10} - 2^{10} = 59049 - 1024 = 58025$

Oppgave 7

a) $a = 0100|0100|0100|0100_2 = 4444_{16}$

$$= \sum_{k=0}^{3} 4\cdot 16^k = 4\,\frac{16^4 - 1}{16 - 1} = \frac{4}{15}\,65535 = 17476_{10}$$

b) $b = 1100110011001100_2$ er negativt i dette formatet siden fortegnsbiten er 1.

La c være komplementet til b, dvs. $c = 0011001100110011_2$

$$= 3333_{16} = \sum_{k=0}^{3} 3\cdot 16^k = \frac{3}{15}\,65535 = 13107.$$

Dermed $c + 1 = 13108$. Det betyr at $b = -13108$.

c) Det største heltallet får vi ved at fortegnsbiten er 0 (et positivt tall) og resten av bitene (15 biter) er 1-ere, dvs. tallet $0111111111111111_2 = 2^{15} - 1 = 32767_{10}$.
Vi kan tenke oss at tallene går i en sirkel. Vi får det minste (største negative) ved å legge 1 til det største. Dvs.
$0111\ 1111\ 1111\ 1111 + 1 = 1000000000000000 = -32768_{10}$
Alternativt kan vi først finne -32767_{10}. Det er (komplement +1): 1000000000000001. Vi får et som er mindre ved å trekke fra 1: $1000000000000000 = -32768_{10}$.

Oppgave 8

Hvis s og t er to bitsekvenser med lengde 8, så er s relatert til t, dvs. $(s,t) \in R$, hvis s har samme antall 0 biter som t.

a) Vi har $(s,s) \in R$ fordi s har samme antall 0-biter som seg selv. Det betyr at R er refleksiv.

Hvis $(s,t) \in R$, så har s samme antall 0-biter som t. Men da har t samme antall 0-biter som s, dvs. $(t,s) \in R$. Det betyr at R er symmetrisk.

Hvis $(s,t) \in R$ og $(t,u) \in R$, så har s samme antall 0-biter som t og t samme antall 0-biter som u. Men da har s også samme antall 0-biter som u, dvs. $(s,u) \in R$. Det betyr at R er transitiv.

Tilsammen gir det at R er en ekvivalensrelasjon.

b) Ekvivalensklassen $[s]$ til $s = 01001100$ består av de bitsekvensene som er relatert til s, dvs. alle bitsekvenser som har fem 0-biter. De fem 0-bitene kan velges på $\binom{8}{5} = 56$ måter. Resten (tre) er 1-biter. Dermed blir det 56 elementer i mengden $[s]$.

c) Vi har $\binom{8}{0}=1$, $\binom{8}{1}=8$, $\binom{8}{2}=28$, $\binom{8}{3}=56$,

$\binom{8}{4}=70$, $\binom{8}{5}=56$, $\binom{8}{6}=28$, $\binom{8}{7}=8$, $\binom{8}{8}=1$.

Ekvivalensklassen som består av alle bitsekvenser med nøyaktig fire 0-biter blir derfor størst. Den har 70 elementer. F.eks. vil $s = 00001111$ og $t = 11110000$ være to forskjellige bitsekvenser som hører til denne ekvivalensklassen.

Oppgave 9

a) $R = \{(a,b), (a,d), (b,d), (c,a), (c,b), (c,d)\}$

b) $$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Fra a kan vi komme til d, men ikke videre. Fra a kan vi komme til b og så til d, men ikke videre. Dvs. ingen veier som starter i a kan ha lengde 3.

Fra b kan vi komme d, men ikke videre. Ingen veier med lengde 3 fra b.

Fra c kan vi komme til d, men ikke videre. Fra c kan vi komme til b og så til d, men ikke videre. Til slutt kan vi komme fra c til a, så til b og videre til d. Veien c – a – b – d har lengde 3.

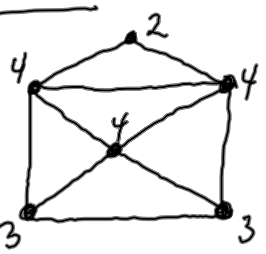
Det er ingen veier fra d.

Konklusjon: Det går en vei med lengde 3 fra c til d og det er den eneste veien med lengde 3.

d) Matrisen $M_R^{[3]}$ representerer veiene med lengde 3. Dermed får vi: $$M_R^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

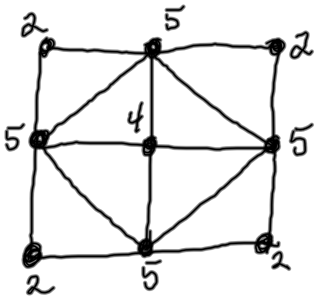
Oppgave 10

a)



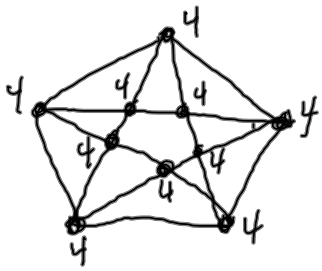
I denne grafen er det nøyaktig to punkter med oddetallsgrad. Det betyr at den har en åpen Euler-vei.

b)



I denne grafen er det fire punkter med oddetallsgrad. Grafen har derfor hverken en lukket eller åpen Euler-vei.

c)



I denne grafen har alle punktene grad 4, dvs. partallsgrad. Grafen har derfor en lukket Euler-vei.