

Avdeling for ingeniørutdanning

Eksamen i Diskret matematikk

Dato: 7. desember 2010

Tid: 9 – 14

Antall sider inklusive forside: 8

Antall oppgaver: 10

Tillatte hjelpemidler: Kun håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst.

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig. Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Faglig veileder: Ulf Uttersrud

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Studieleders/ Fagkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Studieleder/ Fagkoordinator	
Ulf Uttersrud				

Emnekode: FO019A – FO019I

Alle de 10 oppgavene teller likt. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave.

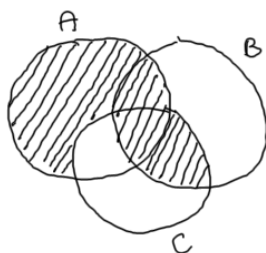
Alle svar skal begrunnes! Det kan for eksempel skje ved at du tar med mellomregninger eller gir andre former for argumentasjon. Kun et svar uten noen begrunnelse er normalt verdiløst.

Oppgave 1

- La p og q være de to utsagnene p : "Det regner" og q : "Det blåser". Skriv flg. utsagn ved hjelp av p , q og logiske operatorer: i) Det blåser, men det regner ikke. ii) Hvis det regner, så blåser det ikke. iii) Det er oppholdsvær og vindstille.
- Avgjør ved hjelp av sannhetsverditabell eller på annen måte om de to sammensatte utsagnene $(p \vee q) \rightarrow r$ og $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ er ekvivalente.

Oppgave 2

- La A og B være mengdene $A = \{a, b, c, d\}$ og $B = \{c, d, e, f\}$. Hva blir $A \cup B$, $A \cap B$ og $A - B$?
- La A , B og C være vilkårlige mengder. Er mengdene $(A \cup B) - C$ og $(A - B) \cup (B - C)$ like? Avgjør det ved å tegne et Venn-diagram for hver av dem. Skravér de aktuelle områdene.
- Finn (og uttrykk ved hjelp av A , B , C og mengdeoperasjoner) den mengden som svarer til det skraverte området i flg. Venn-diagram:



Oppgave 3

La $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 999, 1000\}$, dvs. mengden av heltallene fra 1 til 1000.

- Hva blir summen av tallene i A .
- Hvor mange av tallene i A er delelig med 7?
- Hvor mange av tallene i A er delelig med 4 eller 7?
- Finn summen av de tallene i A som er delelig med 4 eller 7.

Oppgave 4

La $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ være en 2×2 -matrise der a, b, c og d er hele tall. Determinanten $\det(A)$ til A er definert slik:

$$\det(A) = ad - bc$$

Hvis for eksempel $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, blir $\det(A) = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 6 + 4 = 10$.

La Δ være mengden av heltallige 2×2 -matriser og la Z være de hele tallene. Funksjonen $f: \Delta \rightarrow Z$ er definert ved at $f(A) = \det(A)$.

- a) La $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Finn $f(A)$ og $f(B)$.
- b) Er funksjonen f en-til-en? Er funksjonen f på?

Oppgave 5

La utsagnet P_n være at $n^5 - n \equiv 0 \pmod{5}$, dvs. at 5 går opp i $n^5 - n$.

- a) Vis at P_n er sann for $n = 1, 2$ og 3 .
- b) De fire første radene i Pascals trekant ser slik ut:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Sett opp de to neste radene i Pascals trekant og bruk det til å finne koeffisienter a, b, c og d slik at for alle n er

$$(n+1)^5 = n^5 + an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + 1$$

- c) Vis ved hjelp av induksjon at P_n er sann for alle $n \geq 1$. En annen påstand er at utsagnet $n^5 - n \equiv 0 \pmod{30}$ er sant for alle $n \geq 2$. Høres det rimelig ut?

Oppgave 6

Gitt differensligningen $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $n > 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

- Finn a_2 og a_3 .
- Finn en formel for a_n .
- Finn a_{10} .

Oppgave 7

Datotypen *short* i Java bruker et fast bitformat på 16 biter, 2-komplement og fortegnsbitt. I denne oppgaven skal vi bruke det bitformatet.

- Finn tallet $a = 0100010001000100_2$ på heksadesimal form og på desimal form.
- Finn tallet $b = 1100110011001100_2$ på desimal form.
- Hva er binærkoden til det største og det minste (største negative) heltallet i dette formatet?

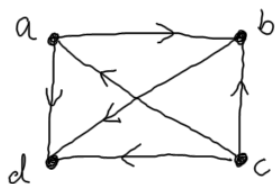
Oppgave 8

La A være mengden av alle bitsekvenser med lengde 8. La R være relasjonen på A definert ved at en bitsekvens s er relatert til en bitsekvens t hvis og bare hvis s og t har like mange 0-er. La for eksempel $s = 01001100$ og $t = 11100000$. Da er s relatert til t siden antall 0-er er lik 5 i begge sekvensene.

- Relasjonen R er en ekvivalensrelasjon. Hvorfor er den det? Begrunn svaret!
- Hvor mange elementer er det i ekvivalensklassen til $s = 01001100$, dvs. hvor mange elementer er det i mengden $[s]$?
- Hvor mange bitsekvenser er det i den ekvivalensklassen som har flest bitsekvenser. Sett opp to forskjellige bitsekvenser som hører til den ekvivalensklassen.

Oppgave 9

La $A = \{a, b, c, d\}$ og R relasjonen på A gitt ved hjelp av følgende graf:



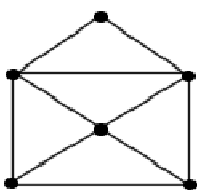
- Sett opp relasjonen R som en mengde av par av elementer fra A .
- Sett opp matrisen M_R til R .

- c) Finn alle par (x, y) av elementer fra A slik at det går en vei i grafen til R fra x til y med lengde 3.
- d) Finn matrisen $M_R \odot M_R \odot M_R = M_R^{[3]}$. Klarer du å finne den uten å utføre den logiske matrisemultiplikasjonen?

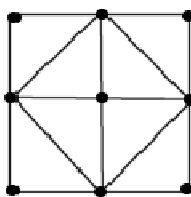
Oppgave 10

Følgende tre urettede grafer a), b) og c) er gitt. Avgjør for hver av dem om grafen har en lukket Euler-vei eller om den har en åpen (ikke lukket) Euler-vei eller eventuelt ingen av delene. Svarene skal begrunnes.

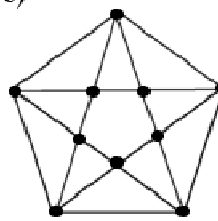
a)



b)



c)



Definisjoner og formeler

Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \quad p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x) \quad \neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

Noen mengdeidentiteter:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Kardinalitet – antallet elementer i en union:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Funksjoner:

I funksjonen $f : A \rightarrow B$ betyr A definisjonsmengde og B verdiområde. En funksjon $f : A \rightarrow B$ er en-til-en hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon $f : A \rightarrow B$ er på hvis $\forall(b \in B) \exists(a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen), div og mod:

La a være et heltall og d et positivt heltall. Da finnes entydige heltall q og r med $0 \leq r < d$ slik at $a = dq + r$. Operasjonene **div** og **mod** defineres ved at $a \text{ div } d = q$ og $a \text{ mod } d = r$.

Moduloregning:

La m være et positivt heltall. To heltall a og b kalles kongruente *modulo* m hvis m går opp i $a - b$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

Rekker:

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^n ar^k = a \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, r \neq 1$

Aritmetisk rekke: Summen av første og siste ledd ganget med antall ledd, delt med 2.

Binomialkoeffisienter:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!}, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Antall forskjellige utvalg på r stykker fra en samling på n stykker:

Ordnet uten tilbakelegging: $n(n-1) \cdots (n-r+1)$

Uordnet uten tilbakelegging: $\binom{n}{r}$

$$\begin{array}{ll} \text{Ordnet med tilbakelegging:} & n^r \\ \text{Uordnet med tilbakelegging:} & \binom{n+r-1}{r} \end{array}$$

Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:

Hvis N objekter skal plasseres i k bokser, må minst én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

Differensligninger:

Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der c_1 og c_2 er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2.$$

Hvis det karakteristiske polynomet har to forskjellige reelle løsninger r_1 og r_2 , blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomet har kun én løsning r_0 , blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Relasjoner:

En relasjon R på en mengde A er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La R være en relasjon på en mengde A .

R er refleksiv hvis $(a, a) \in R$ for alle $a \in A$.

R er symmetrisk hvis $(a, b) \in R$, så er $(b, a) \in R$.

R er antisymmetrisk hvis $a \neq b$ og $(a, b) \in R$, så er $(b, a) \notin R$.

R er transitiv hvis $(a, b) \in R$ og $(b, c) \in R$, så er $(a, c) \in R$.

En partisjon

En samling delmengder $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ av en mengde A utgjør en partisjon av A hvis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = A$ og $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$.

Ekvivalensrelasjoner

En relasjon R på en mengde A er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Ekvivalensklasser

Hvis R er en ekvivalensrelasjon på en mengde A og $a \in A$, så er ekvivalensklassen $[a]$ til a definert ved $[a] = \{b \in A \mid (a, b) \in R\}$. Eller med ord: $[a]$ er lik mengden av de $b \in A$ som er relatert til a . Ekvivalensklassene til en relasjon utgjør en partisjon av A .

Delvis- eller partiell ordning

En relasjon R er en delvis ordning hvis den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

Grafteori:

Graden til et punkt i en urettet graf er antallet kanter knyttet til punktet.

Eulers setning:

En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en lukket Euler-vei (en Euler-sykel) hvis og bare hvis alle punktene i grafen har partallsgrad.

En sammenhengende urettet graf har en åpen (ikke-lukket) Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to punkter i grafen har oddetallsgrad.