Diskret matematikk 2/12-2009 – løsningsforslag

Oppgave 1

a) $r: p \wedge q$, $s: p \to q$, $t: \neg q \to \neg p$

b) Dette kan vises på flere måter

1) Direkte: $\neg p$ er sann hvis p er usann og $q \to r$ er usann hvis q er sann og r er usann. Det betyr at utsagnet er usant for disse verdiene og er dermed ikke en tautologi.

2) $\neg p \to (q \to r) \equiv p \vee (q \to r) \equiv p \vee \neg q \vee r$. Vi ser at utsagnet er usant for p usann, q sann og r usann. Altså ingen tautologi.

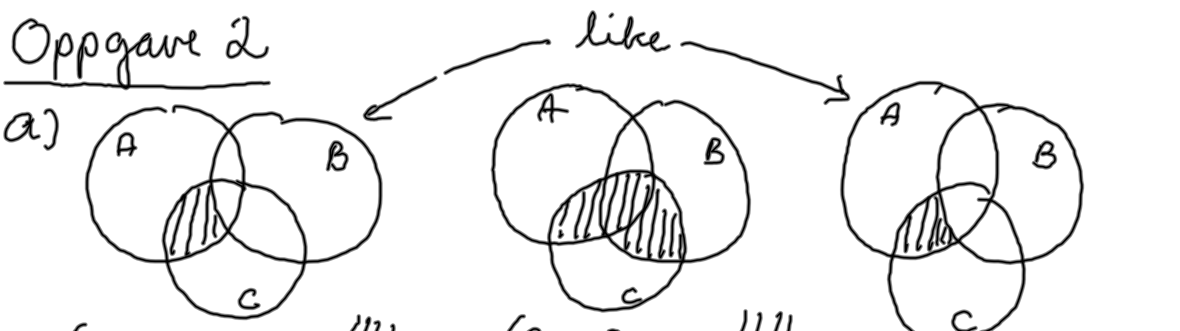
3) Sannhetsverditabell

p	q	r	$\neg p$	$q \to r$	$\neg p \to (q \to r)$
S	S	S	U	S	S
S	S	U	U	U	S
S	U	S	U	S	S
S	U	U	U	S	S
U	S	S	S	S	S
U	S	U	S	U	U
U	U	S	S	S	S
U	U	U	S	S	S

Utsagnet $\neg p \to (q \to r)$ er ikke en tautologi siden det ikke alltid er sant.

Oppgave 2

a)

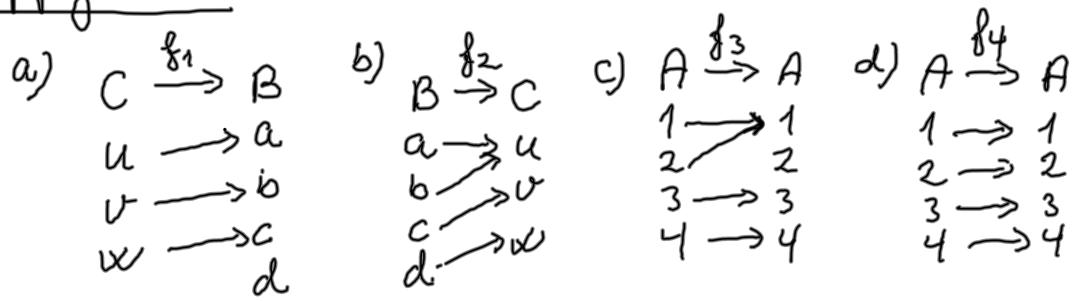


$(A-B) \cap C$ //// $(A \cup B) \cap C$ //// $A \cap (C-B)$ ////

b) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{a, b, e, f\}$, $C = \{a, c, d, f\}$.

$A - C = \{b, e\}$, $B \cap C = \{a, f\}$, $(B - C) \cup (C - B) = \{b, c, d, e\}$

Oppgave 3



Oppgave 4

a) Antallet i A er $1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$

Antallet i B er $9 \cdot 1 \cdot 10 = 90$

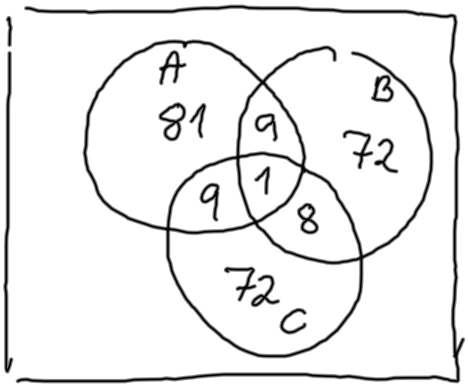
Antallet i C er $9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$

Antallet i $A \cap B = 1 \cdot 1 \cdot 10 = 10$

Antallet i $A \cap C = 1 \cdot 10 \cdot 1 = 10$

Antallet i $B \cap C = 9 \cdot 1 \cdot 1 = 9$

Antallet i $A \cap B \cap C = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$



b) $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$

c) Antallet i $A \cup B \cup C = 100 + 90 + 90 - 10 - 10 - 9 + 1 = 252$.

Dette kan også finnes som $900 - 648 = 252$

d) $81 + 72 + 72 = 225$

Oppgave 5

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$

b) $a_n = 3 + 4k$, $k = 0, \ldots, 24$, dvs. 25 ledd.
Summen blir $(3+99) \cdot 25/2 = 1275$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} (-2)^k = \frac{(-2)^{11} - 1}{-2-1} = \frac{-2049}{-3} = 683$

Oppgave 6

a) Det er $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$ tall som har 0 som første bit. Tar vi vekk $0 = 00000000$ får vi 127 positive tall

b) $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$

c) Det må stå 0 først. Deretter kan vi velge fem 1-biter på $\binom{7}{5} = 21$ måter.

d) $\binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 21 + 7 + 1 = 29$

Oppgave 7

a) $a_2 = 5a_1 - 6a_0 = 5 \cdot 12 - 6 \cdot 5 = 60 - 30 = 30$
$a_3 = 5a_2 - 6a_1 = 5 \cdot 30 - 6 \cdot 12 = 150 - 72 = 78$

b) Karakteristisk polynom: $r^2 = 5r - 6$, $r^2 - 5r + 6 = 0$.
Røtter: $r = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$, $r_1 = 3$, $r_2 = 2$

Generell løsning: $a_n = \alpha 3^n + \beta 2^n$

$\alpha + \beta = a_0 = 5$, $3\alpha + 2\beta = a_1 = 12$. Det gir $\alpha = 2$ og $\beta = 3$.

Løsning: $a_n = 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n$.

c) $a_{10} = 2 \cdot 3^{10} + 3 \cdot 2^{10} = 2 \cdot 59049 + 3 \cdot 1024 = 121170$

Oppgave 8

a) $a = 10|101|010_2 = 252_8 = 2 \cdot 64 + 5 \cdot 8 + 2 = 170_{10}$

$b = 1|010|101_2 = 125_8 = 1 \cdot 64 + 2 \cdot 8 + 5 = 85_{10}$

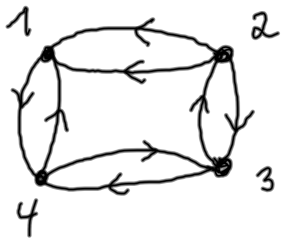
b)
$$
\begin{array}{rr}
a = & 10101010_2 \\
b = & 1010101_2 \\
\hline
x = a + b = & 11111111_2
\end{array}
$$

c)
$$
\begin{array}{rr}
c = & {}^{1}7{}^{1}7_8 \\
+1 = & 1 \\
\hline
y = c + 1 & 100_8
\end{array}
$$

Oppgave 9

a) $R = \{(1,2), (2,1), (1,4), (4,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3)\}$

b) Grafen G_R til R:



c) Matrisen M_R til R:

$$
M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

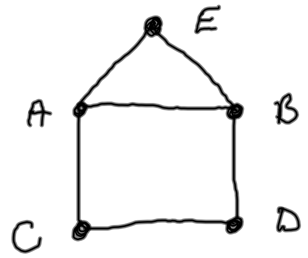
d) R er ikke refleksiv siden f.eks. $(1,1)$ ikke er med

e) R er symmetrisk fordi f.eks. M_R er symmetrisk.

f) Den er ikke transitiv fordi f.eks. $(1,2) \in R$ og $(2,3) \in R$, men $(1,3) \notin R$.

Oppgave 10

a)

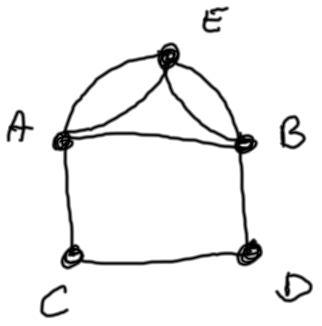


b) grad (A) = 3
grad (B) = 3
grad (C) = 2
grad (D) = 2
grad (E) = 2

c) En rundtur svarer til en Euler-krets, dvs. en lukket Euler-vei. Det finnes en Euler-krets hvis og bare hvis alle punktene har partallsgrad. Denne grafen har to punkter med oddetallsgrad.

d) Det holder ikke med én ekstra ytterdør. En ny ytterdør i A eller B vil gi E oddetallsgrad. En ekstra ytterdør i C eller D vil gi oddetallsgrad.

Vi får til en rundtur hvis vi setter inn to ekstra ytterdører – en i A og en i B:



grad (A) = 4
grad (B) = 4
grad (E) = 4
grad (C) = 2
grad (D) = 2

Nå har alle punktene partallsgrad.