høgskolen i oslo
www.hio.no

# Avdeling for ingeniørutdanning

# Eksamen i Diskret matematikk

**Dato: 02.12.2009**

**Tid: 9 – 14 (5 timer)**

**Antall sider inklusive forside: 7**

**Antall oppgaver: 10**

**Tillatte hjelpemidler: Kun håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst.**

**Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig. Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.**

**Faglig veileder: Ulf Uttersrud**

| Utarbeidet av (faglærer): | Kontrollert av (en av disse): | | | Studieleders/ Fagkoordinators underskrift: |
|---|---|---|---|---|
| | Annen lærer | Sensor | Studieleder/ Fagkoordinator | |
| Ulf Uttersrud | | Roy Istad | | |

**Emnekode: FO019A**

Alle de 10 oppgavene teller likt. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave.

**Alle svar skal begrunnes!** Det kan for eksempel skje ved at du tar med mellomregninger eller gir andre former for argumentasjon. Kun et svar uten noen begrunnelse er normalt verdiløst.

## Oppgave 1

a) Utsagnene $p$, $q$, $r$, $s$ og $t$ er gitt ved

$p$ : «*Det snør*»

$q$ : «*Det er kuldegrader*»

$r$ : «*Det snør og det er kuldegrader*»

$s$ : «*Hvis det snør, så er det kuldegrader*»

$t$ : «*Det snør ikke hvis det ikke er kuldegrader*»

Skriv utsagnene $r$, $s$ og $t$ ved hjelp av $p$, $q$ og logiske operatorer.

b) Et logisk utsagn kalles en tautologi hvis utsagnet alltid er sant. Avgjør om utsagnet $\neg p \to (q \to r)$ er en tautologi.

## Oppgave 2

a) La $A$, $B$ og $C$ være vilkårlige mengder. Lag Venn-diagram for hver av mengdene $(A-B)\cap C$, $(A\cup B)\cap C$ og $A\cap(C-B)$. I hvert tilfelle skal mengden skraveres. Er noen av de tre mengdene like?

b) La $A=\{a, b, c, d, e, f\}$, $B=\{a, b, e, f\}$ og $C=\{a, c, d, f\}$. Finn mengdene $A-C$, $B\cap C$ og $(B-C)\cup(C-B)$.

## Oppgave 3

Gitt mengdene $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{a, b, c, d\}$ og $C=\{u, v, w\}$. I punktene under skal du definere funksjoner av ulik type der du selv bestemmer hvilken av mengdene $A$, $B$ eller $C$ som skal være definisjonsmengde og hvilken som skal være verdiområde. Du definerer en funksjon ved å sette opp definisjonsmengde, verdiområde og hva som er funksjonsverdier. Sett den opp ved hjelp av piler.

a) Definer en funksjon $f_1$ som er en-til-en, men ikke på.

b) Definer en funksjon $f_2$ som er på, men ikke en-til-en.

c) Definer en funksjon $f_3$ som verken er en-til-en eller på.

d) Definer en funksjon $f_4$ som er både en-til-en og på.

Oppgave 4

Heltallene fra og med 100 til og med 999 kalles tresifrede. La $A$ være mengden av tresifrede heltall med 3 som første siffer, $B$ mengden av tresifrede heltall med 3 som andre siffer og $C$ mengden av tresifrede heltall med 3 som siste siffer.

a) Finn antallet i hver av mengdene: $A$, $B$, $C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ og $A \cap B \cap C$.
b) Hvor mange tresifrede heltall er det hvor 3 ikke inngår som siffer?
c) Hvor mange tresifrede heltall er hvor 3 inngår som siffer minst én gang?
d) Hvor mange tresifrede heltall er hvor 3 inngår som siffer nøyaktig én gang?

Oppgave 5

a) Finn summen $A+B$ og produktet $AB$ av matrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.
b) Finn summen $3 + 7 + 11 + 15 + 19 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + 91 + 95 + 99$ .
c) Finn summen $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot - 512 + 1024$ .

Oppgave 6

En *bit* kan enten være 0 eller 1. Datatypen *byte* i Java bruker et fast bitformat på 8 biter og to-komplement. Det betyr at et heltall av typen *byte* er positivt (større enn 0) hvis og bare hvis den første biten er 0 og det har minst én 1-bit.

a) Hvor mange positive heltall av typen *byte* finnes det?
b) Regn ut binomialkoeffisienten $\binom{7}{5}$.
c) Hvor mange positive heltall av typen *byte* har nøyaktig fem 1-biter?
d) Hvor mange positive heltall av typen *byte* har minst fem 1-biter?

Oppgave 7

Gitt differensligningen $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ , $n > 1$ , $a_0 = 5$ , $a_1 = 12$ .

a) Finn $a_2$ og $a_3$.
b) Finn en formel for $a_n$.
c) Finn $a_{10}$.

Oppgave 8

Tallene $a = 10101010_2$ og $b = 1010101_2$ er gitt på binær form og tallet $c = 77_8$ på oktal form. La $x = a + b$ og $y = c + 1$.

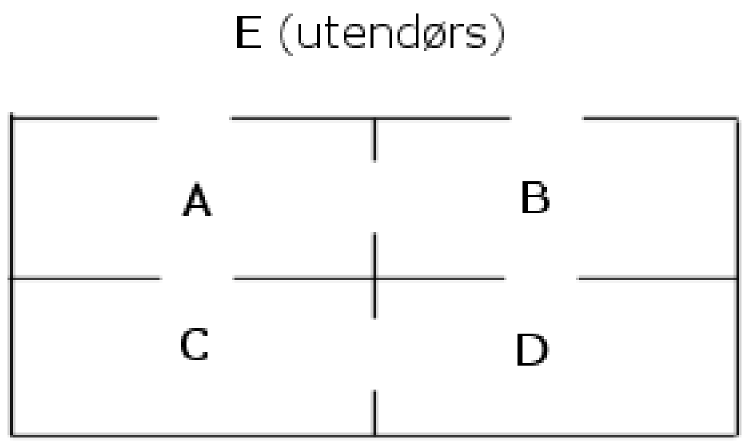
a) Finn $a$ og $b$ på desimal form og på oktal form.
b) Finn $x$ på binær form.
c) Finn $y$ på oktal form.

Oppgave 9

La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $R$ relasjonen på $A$ gitt ved at $(a, b) \in R$ hvis og bare hvis $a + b$ er et oddetall. Det betyr for eksempel at $(2, 3) \in R$ siden $2 + 3 = 5$ er et oddetall. Mens for eksempel $(4, 2) \notin R$ siden $4 + 2 = 6$ er et partall.

a) Sett opp alle tallparene i relasjonen $R$
b) Tegn grafen $G_R$ til relasjonen $R$
c) Finn matrisen $M_R$ til relasjonen $R$
d) Er $R$ refleksiv?
e) Er $R$ symmetrisk
f) Er $R$ transitiv?

Oppgave 10




Figuren over viser rommene i et hus. Det er fire rom med navn A, B, C og D. I hvert rom er det et antall dører (markert på figuren med åpninger). For eksempel er det tre dører i rom A. En dør som går ut av huset (til E) kalles en *ytterdør* og en dør som går fra et rom til et naborom kalles en *innerdør*. I rom A er det dermed én ytterdør og to innerdører. Vi sier at det er mulig å gjøre en *rundtur* hvis vi kan starte inne i et rom eller utendørs, gå gjennom alle dørene nøyaktig én gang og ende opp der vi startet.

a) La hvert av rommene (A, B, C, D) og utendørs (E) være punkter i en urettet graf med dørene som kanter mellom punktene. Tegn grafen.
b) Sett opp graden til hvert av de fem punktene i grafen.
c) Det er ikke mulig å gjøre en rundtur. Hvorfor ikke?
d) Kan det gjøres en rundtur hvis det settes inn en ekstra ytterdør i et av rommene? Kan det gjøres en rundtur hvis det settes inn to ekstra ytterdører?

# Definisjoner og formeler

## Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $\qquad$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\qquad$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$p \to q \equiv \neg p \vee q$ $\qquad$ $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$ $\qquad$ $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

## Noen mengdeidentiteter:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

## Kardinalitet – antallet elementer i en union:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

## Funksjoner:

I funksjonen $f : A \to B$ betyr $A$ definisjonsmengde og $B$ verdiområde. En funksjon $f : A \to B$ er en-til-en hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon $f : A \to B$ er på hvis $\forall (b \in B)\, \exists (a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

## Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen):

La $a$ være et heltall og $d$ et positivt heltall. Da finnes entydige heltall $q$ og $r$ med $0 \leq r < d$ slik at $a = dq + r$.

## Moduloregning:

La $m$ være et positivt heltall. To heltall $a$ og $b$ kalles ekvivalente *modulo* $m$ hvis $m$ går opp i $b - a$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

## Rekker:

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^{n} a r^k = a \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \; r \neq 1$

Aritmetisk rekke: Summen av første og siste ledd ganget med antall ledd, delt med 2.

**Binomialkoeffisienter:**

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}\ , \qquad \binom{n}{0} = 1\ , \qquad \binom{n}{1} = n\ , \qquad \binom{n}{n} = 1\ ,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}\ , \qquad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Antall forskjellige utvalg på $r$ stykker fra en samling på $n$ stykker:

| | |
|---|---|
| Ordnet uten tilbakelegging: | $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ |
| Uordnet uten tilbakelegging: | $\binom{n}{r}$ |
| Ordnet med tilbakelegging: | $n^r$ |
| Uordnet med tilbakelegging: | $\binom{n+r-1}{r}$ |

**Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:**

Hvis $N$ objekter skal plasseres i $k$ bokser, må minst
én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

**Differensligninger:**

Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der $c_1$ og $c_2$ er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2 .$$

Hvis det karakteristiske polynomet har to forskjellige reelle løsninger $r_1$ og $r_2$, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der $\alpha$ og $\beta$ er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene $a_0$ og $a_1$ er gitt, finner en $\alpha$ og $\beta$ ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomet har kun én løsning $r_0$, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der $\alpha$ og $\beta$ er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene $a_0$ og $a_1$ er gitt, finner en $\alpha$ og $\beta$ ved å løse et ligningssystem.

**Relasjoner:**

En relasjon $R$ på en mengde $A$ er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La $R$ være en relasjon på en mengde $A$.

$R$ er refleksiv hvis $(a,a) \in R$ for alle $a \in A$.

$R$ er symmetrisk hvis $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \in R$.

$R$ er antisymmetrisk hvis $a \neq b$ og $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \notin R$.

$R$ er transitiv hvis $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$, så er $(a,c) \in R$.

$R$ er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

$R$ er en delvis ordning hvis den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

**Grafteori:**

Graden til et punkt i en urettet graf er antallet kanter knyttet til punktet.

Eulers setning:

En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en lukket Euler-vei (en Euler-sykel) hvis og bare hvis alle punktene i grafen har partallsgrad. En sammenhengende urettet graf har en (ikke-lukket) Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to punkter i grafen har oddetallsgrad.