Eksamen i Diskret matematikk 9. desember 2008

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) i) $p \wedge q$ ii) $p \to q$ iii) $q \wedge \neg p$ iv) $q \to p$

b) Dette kan løses på flere måter. F.eks. ved å bruke sannhetsverditabell:

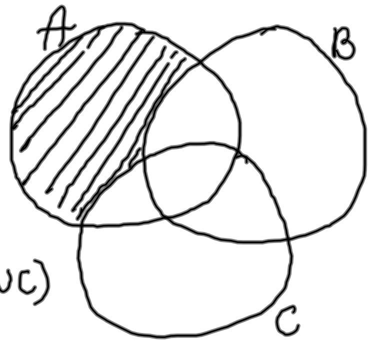
p	q	r	$p \vee q$	$r \to (p \vee q)$	$\neg(r \to (p \vee q))$
S	S	S	S	S	U
S	S	U	S	S	U
S	U	S	S	S	U
S	U	U	S	S	U
U	S	S	S	S	U
U	S	U	S	S	U
U	U	S	U	U	S
U	U	U	U	S	U

Utsagnet $\neg(r \to (p \vee q))$ er sant kun når p er usann, q er usann og r er sann.

Oppgaven kan også løses slik: $\neg(r \to (p \vee q))$ er sann når $r \to p \vee q$ er usann, og den er usann kun når r er sann og $p \vee q$ er usann, dvs. kun når p er usann, q er usann og r er sann.

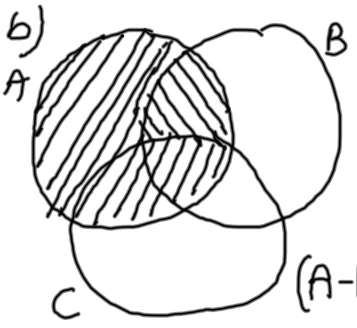
Oppgave 2

a)



//// $A-(B \cup C)$

b)



//// $A-(B-C)$

\\\\ $(A \cap B)-C$

$(A-(B-C)) \cup ((A \cap B)-C) = A$

Oppgave 3

a) $f(0) = (0 \bmod 3) + (0 \bmod 7) = 0 + 0 = 0$
$f(4) = (4 \bmod 3) + (4 \bmod 7) = 1 + 4 = 5$
$f(10) = (10 \bmod 3) + (10 \bmod 7) = 1 + 3 = 4$
$f(12) = (12 \bmod 3) + (12 \bmod 7) = 0 + 5 = 5$

b) Vi har at $k \bmod 3$ alltid er mindre enn eller lik 2 og at $k \bmod 7$ alltid er mindre enn eller lik 6. Dermed vil $f(k)$ alltid være mindre enn eller lik 8. Med andre ord finnes det ingen k slik at $f(k) = 9$.

Ved litt prøving og feiling finner vi at $f(20) = 8$. Generelt: La a, b være positive heltall. Da har vi at $ab - 1 = a(b-1) + a - 1 = b(a-1) + b - 1$. Det betyr at hvis $k = ab - 1$, vil $(k \bmod a) + (k \bmod b) = a - 1 + b - 1 = a + b - 2$. Hvis nå $a = 3$ og $b = 7$, får vi som over at når $k = ab - 1 = 3 \cdot 7 - 1 = 21 - 1 = 20$, vil $(k \bmod 3) + (k \bmod 7) = 3 + 7 - 2 = 8$.

c) I a) og b) har vi funnet at $0, 4, 5, 8$ er i verdimengden til f og at $f(k) \leq 8$ for alle $k \in N$. Videre er $f(k)$ definert som summen av to rester ($k \bmod 3$ og $k \bmod 7$) og da en rest aldri er negativ, må $f(k) \geq 0$. Vi må også sjekke om $1, 2, 3, 6$ og 7 er i verdimengden. Vi har $f(7) = 1$, $f(1) = 2$, $f(3) = 3$, $f(6) = 6$ og $f(5) = 7$. Dermed blir verdimengden lik $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. f er <u>ikke</u> en-til-en siden f.eks. $f(4) = f(12) = 5$. f er <u>ikke</u> på siden verdimengden er mindre enn verdiområdet N.

Oppgave 4

a)

432	2
216	0
108	0
54	0
27	0
13	0
6	1
3	0
1	1
0	1

$432_{10} = 110110000_2$

$= 1\ 1011\ 0000_2 = 1B0_{16}$

b) $AAA_{16} = 101010101010_2$

$= 101\ 010\ 101\ 010_2 = 5252_8$

c)

$\ 10101010$
$\sim\ 01010101$
$+1\ 01010110$

$01010110_2 = 2+4+16+64 = 86$

Det betyr at $10101010 = -86$

$\ 10000000$
$\sim\ 01111111$
$+1\ 10000000$

$10000000_2 = 128$

Det betyr at $10000000 = -128$

$\ 11111111$
$\sim\ 00000000$
$+1\ 00000001$

$00000001_2 = 1$

Det betyr at $11111111 = -1$

Oppgave 5

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad AA^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Oppgave 6

a) $1+2+3+4+\cdots+99+100 = (1+100)100/2 = 5050$

b) $2+5+8+11+\cdots+95+98 = (2+98)\cdot 33/2 = 1650$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} 3(-2)^k = 3\frac{(-2)^7-1}{-2-1} = 1-(-2)^7 = 1+128 = 129$

Oppgave 7

a) $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

b) Det er to muligheter (2 eller 3) for hvert av de fem sifrene. Dermed 2^5 fall i A som ikke har 1 som siffer.

c) Vi kan velge ut de to sifrene som skal være 1-ere på $\binom{5}{2} = 10$ måter. For de tre øvrige sifrene er det for hvert siffer to (2 eller 3) muligheter.
Dermed $\binom{5}{2} 2^3 = 80$ fall i A der 1 inngår nøyaktig to ganger.

d) i) Hvis det ikke er noen 1-ere, er det heller ikke to enere ved siden av hverandre. Vi har $2^5 = 32$ slike.

ii) Hvis vi har nøyaktig én 1-er, er det heller ikke to ved siden av hverandre. Det er $\binom{5}{1} \cdot 2^4 = 80$ slike.

iii) Hvis vi har nøyaktig to 1-ere, er det fire måter at de kan stå ved siden av hverandre. Det er
11_ _ _, _11_ _, _ _11_ og _ _ _11.
Dermed er det $10 - 4 = 6$ måter de ikke står ved siden av hverandre. Dermed $6 \cdot 2^3 = 48$ slike.

iii) Hvis vi har tre 1-ere, er det kun tilfellet 1_1_1 at to ikke står ved siden av hverandre.
Dermed $2^2 = 4$ slike.

iv) Hvis vi har fire eller fem 1-ere, må to av dem stå ved siden av hverandre.

Tilsammen $32 + 80 + 48 + 4 = 164$ av fallene i A har ikke to 1-ere ved siden av hverandre. (Obs: Resultat kan også skrives som $\binom{6}{0} 2^5 + \binom{5}{1} 2^4 + \binom{4}{2} 2^3 + \binom{3}{3} 2^2$.)

Oppgave 8

a) $a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 3\cdot 3 - 2\cdot 2 = 5$

$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3\cdot 5 - 2\cdot 3 = 9$

$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3\cdot 9 - 2\cdot 5 = 17$

b) Karakteristisk polynom: $r^2 = 3r - 2$, $r^2 - 3r + 2$

$r^2 - 3r + 2 = 0$ gir røttene $r_1 = 2$ og $r_2 = 1$.

Generell løsning: $a_n = \alpha 2^n + \beta$

$$a_0 = \alpha + \beta = 2 \quad , \quad a_1 = 2\alpha + \beta = 3$$

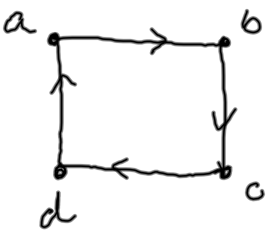
Det gir $\alpha = 1$ og $\beta = 1$.

Løsningen blir: $a_n = 2^n + 1$

c) $a_{10} = 2^{10} + 1 = 1025$

Oppgave 9

a) Grafen til R:



$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) R er ikke refleksiv siden det ikke er 1-ere på diagonalen i M_R

R er ikke symmetrisk siden M_R ikke er symmetrisk.

R er antisymmetrisk

R er ikke transitiv siden $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$, men $(a,c) \notin R$.

c) Det går en vei fra a til a med lengde 4, dvs veien a – b – c – d – a. Tilsvarende går det veier med lengde 4 fra b til b, fra c til c og fra d til d. Det er de eneste mulighetene. Svaret er derfor parene

$$(a,a),\ (b,b),\ (c,c),\ (d,d)$$

d) Dette kan vi finne svaret på uten å multiplisere. De plassene i $M_R^{[2]}$ svarer til de parene (x,y) der det går en vei med lengde 2 fra x til y. Det er (a,c), (b,d), (c,a) og (d,b). Dermed blir

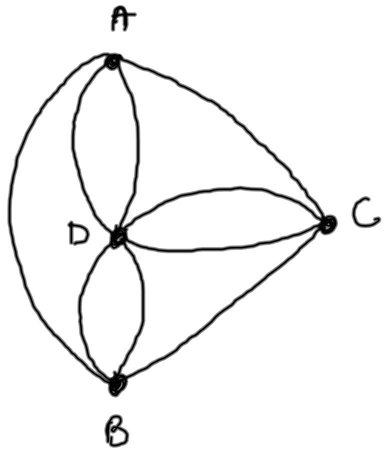
$$M_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

På samme måte (se punkt c) får vi

$$M_R^{[4]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 10

a)



b) grad(A) = 4
grad(B) = 4
grad(C) = 4
grad(D) = 6

c) Det finnes en lukket Eulervei siden alle punktene har partallsgrad.
Vi kan f.eks. velge flg. vei:

D – A – B – C – A – D – C – D – B – D