

Eksamen i Diskret matematikk tirsdag 4. desember 2007

Oppgave 1a

P	q	$\neg P$	$P \rightarrow q$	$\neg P \vee q$
S	S	U	S	S
S	U	U	U	U
U	S	S	S	S
U	U	S	S	S

Kolonnene for $P \rightarrow q$ og $\neg P \vee q$ er like. De to utsagnene er derfor ekvivalente.

Oppgave 1b

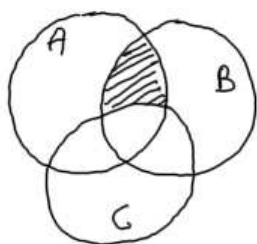
Direkte løsning: Utsagnet $(p \wedge q) \rightarrow r$ er usant kun når $p \wedge q$ er sant og r er usann, dvs når p er sann, q er sann og r usann. Dermed blir $\neg((p \wedge q) \rightarrow r)$ sann for samme kombinasjon av p, q og r . Med andre ord er $\neg((p \wedge q) \rightarrow r)$ ikke en selvmotsigelse.

Løsning ved hjelp av sannhetstabell:

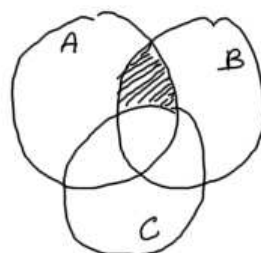
P	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$\neg((p \wedge q) \rightarrow r)$
S	S	S	S	S	U
S	S	U	S	U	S
S	U	S	U	S	U
S	U	U	U	S	U
U	S	S	U	S	U
U	S	U	U	S	U
U	U	S	U	S	U
U	U	U	U	S	U

Vi ser i kolonnen for $\neg((p \wedge q) \rightarrow r)$ at utsagnet er sant for p sann, q sann og r usann. Utsagnet er derfor ikke en selvmotsigelse.

Oppgave 2a



$(A \cap B) - C$ er skravert ///



$A \cap (B - C)$ er skravert ///

Oppgave 2b

La D være mengden av de som tar Diskret matematikk, P mengden av de som tar Programmering og W mengden av de som tar Web-prosjekt.

1. Løsning ved hjelp av inklusjon-eksklusjon:

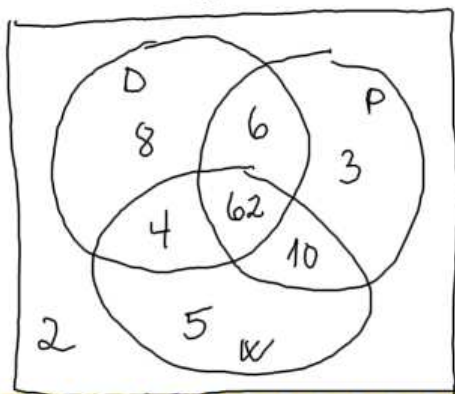
$$|D \cup P \cup W| = |D| + |P| + |W| - |D \cap P| - |D \cap W| - |P \cap W| + |D \cap P \cap W|$$
$$= 80 + 81 + 81 - 68 - 66 - 72 + 62 = 98.$$

Det er dermed $100 - 98 = 2$ som ikke tar noen av fagene.

$$|D \cap P \cup D \cap W| = |D \cap P| + |D \cap W| - |D \cap P \cap W| = 68 + 66 - 62 = 72.$$

Det er dermed $80 - 72 = 8$ som kun tar Diskret matematikk.

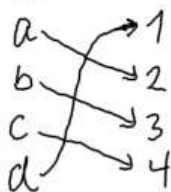
2. Løsning ved hjelp av Venn-diagram



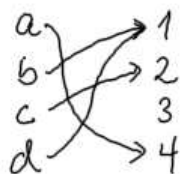
Venn-diagrammet gir at det er 2 studenter som ikke tar noen av fagene og 8 som kun tar Diskret matematikk.

Oppgave 3

$A \xrightarrow{f} B$



$A \xrightarrow{g} B$



a) Verdimengden til f er like B siden det går piler inn til alle elementene i B . Det betyr at f er på. Det er ingen elementer i B som det går to eller flere piler til. Det betyr at f er en-til-en.

b) Verdimengden til g er like $\{1, 2, 4\}$. Det betyr at g ikke er på siden det ikke er noen pil til 3. Det går to piler inn til 1. Det betyr at g ikke er en-til-en.

c) Funksjonen f har en invers funksjon $h: B \rightarrow A$ siden f er en-til-en og på. Fra tegningen over får vi at $h(1) = d$, $h(2) = a$, $h(3) = b$ og $h(4) = c$.

Oppgave 4

Matriseproduktet AB er definert hvis og bare hvis A er en $m \times n$ -matrise og B en $n \times k$ -matrise. Da blir produktet AB en $m \times k$ -matrise.

Alternativt: Matriseproduktet AB er definert hvis og bare hvis antall kolonner i A er lik antall rader i B .

a) A er en 2×2 -matrise, B en 2×3 -matrise og C en 3×2 -matrise. Det betyr at AB og BC er definert og at BA og AC ikke er definert.

AB blir en 2×3 -matrise og BC en 2×2 -matrise.

$$b) AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 0+4 & 1+0 \\ 0-1 & 0+2 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+1 & 0+0+0 \\ -1+0+0 & 0+4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Oppgave 5

a) $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$

b) $(1,5,9), (1,6,8), (2,4,9), (2,5,8), (2,6,7), (3,4,8), (3,5,7), (4,5,6)$

$a_1=2, a_2=3, a_3=2, a_4=3, a_5=4, a_6=3, a_7=2, a_8=3, a_9=2$

c) Det er kun 5 som er med i 4 utvalg. Dermed må 5 stå i midten. Et tall i et hjørne hører til én rad, én kolonne og én diagonal. Dermed er det kun tall som er med i nøyaktlig 3 forskjellige utvalg som kan stå i hjørnene. Dvs. tallene 2, 4, 6 og 8. F.eks. kan tallet 2 stå i ett av hjørnene, dvs. fire muligheter.

Vi prøver først med 2 i øverste venstre hjørne. Dermed må vi ha 8 i nederste høyre hjørne for at summen i diagonalen skal bli 15:

2		
	5	
		8

Vi kan nå velge 4 eller 6 i det øverste høyre hjørnet, dvs. to muligheter. Velger vi f.eks. 4 vil resten av tallene komme som nødvendigheter:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Diskusjonen over viser at det er $4 \cdot 2 = 8$ muligheter, dvs. 8 forskjellige magiske kvadrater.

Oppgave 6

a) Siden første siffer skal være oddetall, er det fem muligheter som første siffer. For hver av de fem andre sifrene er det ti muligheter. Dermed:

$$5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 5 \cdot 10^5 = 500000 \text{ "lovlige" pin-koder.}$$

b) Første siffer skal være oddetall, dvs. fem muligheter.

Vi kan velge to parsiffer blant de fem andre sifrene på $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ måter. Det er fem muligheter for hvert parsiffer og fem muligheter for hvert av de tre resterende sifrene. Dermed

$$5 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5^7 = 156250 \text{ "anbefalte" pin-koder.}$$

↑
første siffer ↑
 $\binom{5}{2}$ ↑
 parsiffer ↑
 ↑
 oddesiffer

c)

To av de fem siste sifrene skal være parsiffer og de skal ikke stå inntil hverandre. La p bety parsiffer og o oddesiffer. Det er lettest å finne de tilfellene der de står inntil hverandre. Det er flg. fire tilfeller:

$$ppooo, oppoo, ooppo, ooppo$$

Dermed er det $10 - 4 = 6$ tilfeller der de to parsifrene ikke står inntil hverandre. Dermed:

$$5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 6 \cdot 5^5 = 93750 \text{ "optional" pin-koder.}$$

Oppgave 7

a) $a_1 = 5^1 - 2^1 = 5 - 2 = 3$, $a_2 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$
 $a_3 = 5^3 - 2^3 = 125 - 8 = 117$, $a_4 = 5^4 - 2^4 = 625 - 16 = 609$

b) $a_1 = 3$, $a_2 = 3 \cdot 7$, $a_3 = 3 \cdot 3 \cdot 13$, $a_4 = 3 \cdot 7 \cdot 29$

c) 1. Basissteppet: Påstanden stemmer for $n=1$ siden
3 går opp i 3

2. Induksjonssteppet: Anta at påstanden stemmer for $k \geq 1$,
dvs. at 3 går opp i $5^k - 2^k$. Vi har $5^{k+1} - 2^{k+1} =$
 $5 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^k = (3+2)5^k - 2 \cdot 2^k = 3 \cdot 5^k + 2(5^k - 2^k)$.

Induksjonshypotesen sier at 3 går opp i $5^k - 2^k$ og
dermed i $2(5^k - 2^k)$. Videre går 3 opp i $3 \cdot 5^k$.

Det betyr at 3 går opp i summen $3 \cdot 5^k + 2(5^k - 2^k)$
og dermed i $5^{k+1} - 2^{k+1}$.

Induksjonsprinsippet gir at 3 går opp i $5^n - 2^n$ for
alle heltall $n \geq 1$.

Utenfor oppgaven

Vi ser at 7 er faktor i både a_2 og a_4 . Det kan vises
på en tilsvarende måte som over at 7 går opp
i $5^n - 2^n$ for alle partall $n \geq 1$. Det betyr spesielt
at 21 går opp i $5^n - 2^n$ for alle partall $n \geq 1$.

Oppgave 8

$$a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 3$$

$$a_2 = 7a_1 - 10a_0 = 21, \quad a_3 = 7a_2 - 10a_1 = 147 - 30 = 117,$$

$$a_4 = 7a_3 - 10a_2 = 819 - 210 = 609$$

Det karakteristiske polynomiet: $\pi^2 = 7\pi - 10$,

$$\pi^2 - 7\pi + 10 = 0. \quad \text{Det gir } \pi_1 = 5, \pi_2 = 2.$$

Generell løsning: $a_n = \alpha 5^n + \beta 2^n$.

$$a_0 = 0 \text{ gir } \alpha + \beta = 0 \text{ og } a_1 = 3 \text{ gir } 5\alpha + 2\beta = 3.$$

Dette gir $\alpha = \beta = 1$. Dermed:

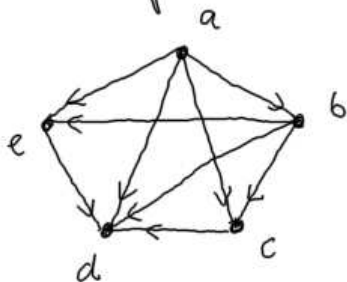
$$a_n = 5^n - 2^n$$

$$a_5 = 5^5 - 2^5 = 3125 - 32 = 3093$$

legg merke til at dette er samme følge som i Oppgave 7.

Oppgave 9

a) Grafen til R



Matrisen til R

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) R er ikke refleksiv. Hverken (a,a) , (b,b) , (c,c) , (d,d) eller (e,e) er i R .

La $x, y \in A$. Vi ser at i alle de tilfellene der $(x, y) \in R$, så er $(y, x) \notin R$. Det betyr at R er antisymmetrisk.

La $x, y, z \in A$. Vi ser at i alle de tilfellene der $(x, y) \in R$ og $(y, z) \in R$, så er også $(x, z) \in R$. Dvs. R er transitiv.

En relasjon kalles en partiell ordning hvis den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv. Men vår R er ikke refleksiv og dermed er den ikke en partiell ordning.

c) Vi ser av grafen at det finnes kun to veier med lengde 3. Det er a, b, c, d og a, b, e, d . Begge starter i a og ender i d . Det betyr at matrisen $M_R^{[3]}$ får en 1-er i posisjonen (a, d) og 0-er på alle andre plasser

$$M_R^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 10

a) $\text{grad}(a)=4$, $\text{grad}(b)=4$, $\text{grad}(c)=3$, $\text{grad}(d)=4$, $\text{grad}(e)=3$

b) Det finnes en lukket Euler-vei hvis og bare hvis alle punktene har partallsgrad. Altså ingen lukket Euler-vei.

Det finnes en ikke-lukket Euler-vei hvis og bare hvis det er nøyaktlig to punkter med oddetallsgrad. Dermed er det en slik vei i vår graf. Veien må starte i et av punktene med oddetallsgrad. Det finnes flere veier. En av dem er: $c, a, d, e, a, b, c, d, b, e$