

AVDELING FOR INGENIØRUTDANNING

EKSAMENSOPPGAVE

Emne: Diskret matematikk		Emnekode: FO 019A	Fagansvarlig: Ulf Uttersrud
Gruppe(r):		Dato: 04.12.2007	Eksamenstid: 9 - 14
Eksamensoppgaven består av:	Antall sider (inkl. forsiden): 4	Antall oppgaver: 10	Antall vedlegg: 0
Tillatte hjelpemidler:	Alle trykte og skrevne hjelpemidler samt håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst		
Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig. Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.			

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Studieleders/ Fagkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Studieleder/ Fagkoordinator	
Ulf Uttersrud		Kai Kristensen		

Alle de 10 oppgavene teller likt. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave.

Alle svar skal begrunnes! For eksempel ved å ta med mellomregninger eller ved å gi annen form for argumentasjon.

Oppgave 1

- a) La p og q være logiske utsagn. Bruk sannhetsverditabell til å vise at de sammensatte utsagnene $p \rightarrow q$ og $\neg p \vee q$ er ekvivalente.
- b) Et logisk utsagn kalles en selvmotsigelse (eng: contradiction) hvis utsagnet alltid er usant. La p , q og r være logiske utsagn. Avgjør om det sammensatte utsagnet $\neg((p \wedge q) \rightarrow r)$ er en selvmotsigelse.

Oppgave 2

- a) La A , B og C være vilkårlige mengder. Lag Venn-diagram og skravér mengdene $(A \cap B) - C$ og $A \cap (B - C)$.
- b) I en gruppe på 100 studenter er det 80 som tar Diskret matematikk, 81 som tar Programmering og 81 som tar Web-prosjekt. Det er 68 som tar både Diskret matematikk og Programmering, 72 som tar både Programmering og Web-prosjekt og 66 som tar både Diskret matematikk og Web-prosjekt. Det er 62 som tar alle tre fagene. Hvor mange av de 100 tar ingen av de tre fagene? Hvor mange av dem tar kun Diskret matematikk?

Oppgave 3

La mengdene A og B være gitt ved $A = \{a, b, c, d\}$ og $B = \{1, 2, 3, 4\}$. La funksjonene $f: A \rightarrow B$ og $g: A \rightarrow B$ være gitt ved $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, $f(c) = 4$, $f(d) = 1$, $g(a) = 4$, $g(b) = 1$, $g(c) = 2$, $g(d) = 1$

- a) Finn verdimengden til f . Er f en-til-en? Er f på? Begrunn svarene!
- b) Finn verdimengden til g . Er g en-til-en? Er g på? Begrunn svarene!
- c) Hvilken av disse to funksjonene har en invers? Sett opp den inverse funksjonen til den av de to som har en invers.

Oppgave 4

Gitt tallmatrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- a) Avgjør hvilke av følgende matriseprodukter som er definert og sett opp hva dimensjonen blir for de som er definert: AB , BA , AC , BC
- b) Regn ut de matriseproduktene som er definert.

Oppgave 5

- a) Gitt mengden $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Hvor mange forskjellige uordnede utvalg (uten tilbakelegging) på tre tall kan vi velge fra A ?
- b) Finn de åtte utvalgene av typen fra punkt a) som har 15 som sum. Et eksempel er utvalget $\{1, 5, 9\}$. (Hint: Finn først alle slike utvalg der 1 inngår, så alle der 2 (men ikke 1) inngår, så alle der 3 (men ikke 1 og 2) inngår, osv.) La så n være et av tallene fra A og la a_n være antallet av disse utvalgene (med 15 som sum) der n inngår. Finn a_n for hver n .
- c) De ni tallene fra A skal plasseres i hver sin rute i et 3×3 -kvadrat maken til det i figuren under. Hvis de plasseres slik at summen av tallene i hver rad er lik 15, summen av tallene i hver kolonne er lik 15 og summen av tallene i hver diagonal er 15, kalles det et magisk kvadrat. Sett inn tallene slik at det blir et magisk kvadrat. Hvor mange forskjellige magiske 3×3 -kvadrater er det? (Hint: Tallet i midten vil høre til fire forskjellige summer eller til fire utvalg av typen fra punkt b). Hvilket tall må det være? Hvilke tall kan stå i hvert hjørne?)

Oppgave 6

I en bestemt anvendelse av pinkoder skal pinkodene være sekssifrede heltall, dvs. heltall fra og med 100000 til og med 999999. I denne oppgaven kaller vi sifrene 0, 2, 4, 6 og 8 for parsiffrer og sifrene 1, 3, 5, 7 og 9 for oddesiffrer.

- a) En «lovlig» pinkode må være sekssifret og starte med et oddesiffer. Hvor mange «lovlige» pinkoder finnes det?
- b) En «anbefalt» pinkode må være «lovlig» (se punkt a) og inneholde nøyaktig to parsiffrer og dermed fire oddesiffrer. Hvor mange «anbefalte» pinkoder finnes det?
- c) En «optimal» pinkode må, i tillegg til å være «anbefalt» (se punkt b), ikke ha de to parsifrene inntil hverandre. Hvor mange «optimale» pinkoder finnes det?

Oppgave 7

La n være et positivt heltall og la a_n være definert ved $a_n = 5^n - 2^n$.

- Finn a_1 , a_2 , a_3 og a_4 .
- Finn primtallsfaktoriseringen av hvert av heltallene a_1 , a_2 , a_3 og a_4 .
- Bruk induksjon til å vise at 3 går opp i $5^n - 2^n$ for alle positive heltall n .

Oppgave 8

Gitt differensligningen $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 3$. Finn a_2 , a_3 og a_4 . Finn en formel for a_n . Finn a_5 ved å sette inn i formelen.

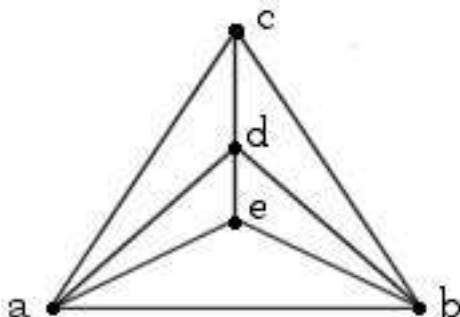
Oppgave 9

La $A = \{a, b, c, d, e\}$ og la R være relasjonen på A gitt ved

$$R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (c, d), (e, d)\}$$

- Tegn grafen til R og sett opp matrisen M_R til R .
- Er R refleksiv? Antisymmetrisk? Transitiv? Er R en partiell ordning?
- Finn alle par (x, y) av elementer fra A slik at det går en vei i grafen til R fra x til y med lengde 3. Husk at en vei i en rettet graf alltid går i kantenenes retning. Finn dette ved å studere grafen. Kan du ved hjelp av denne informasjonen eller på annen måte finne matrisen $M_R^{[3]}$? Obs: $M_R^{[3]}$ betyr det logiske matriseproduktet $M_R \odot M_R \odot M_R$.

Oppgave 10 Gitt følgende urettede graf:



- Finn graden til hvert punkt (eng: vertex) i grafen.
- Finnes det en lukket Euler-vei i grafen? Finnes det en ikke-lukket Euler-vei? Skriv opp veien (punktene på veien) hvis svaret er ja på et av spørsmålene.