Løsningsforslag Diskret matematikk 23. nov. 2006

## Oppgave 1

i)

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p\wedge q$ | $p\vee q$ | $p\wedge\neg q$ | $q\wedge\neg p$ | $\neg(p\wedge q)$ | $(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p)$ | $(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S | S | U | U | S | S | U | U | U | U | U |
| S | U | U | S | U | S | S | U | S | S | S |
| U | S | S | U | U | S | U | S | S | S | S |
| U | U | S | S | U | U | U | U | S | U | U |

like

Sannhetsverditabellen viser at $(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p)$ er ekvivalent med $(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$

ii) Hvis $p$ er usann, $q$ er sann og $r$ er sann, vil $p\vee\neg q\vee\neg r$ bli usann.

iii) $P(2,3)$ betyr $2\cdot 3 > 2+3$, dvs. $6>5$ og det er sant.

$P(1,3)$ betyr $1\cdot 3 > 1+3$, dvs. $3>4$ og det er usant.

$\forall m\forall n\, P(m,n)$ er usant siden f.eks. $P(1,3)$ er usant.
$\exists m\exists n\, P(m,n)$ er sant siden f.eks. $P(2,3)$ er sant.

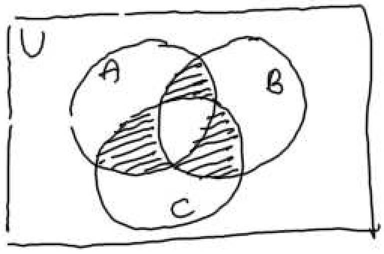
Hvis f.eks. $m=1$, så finnes det ikke noe positivt heltall $n$ slik at $1\cdot n > 1+n$, dvs. $n>n+1$.
Det betyr at $\forall m\exists n\, P(m,n)$ er usant.

Anta at det finnes en $m>0$ slik at $m\cdot n > m+n$ for alle $n>0$. Velg $n=1$. Da må $m\cdot 1 > m+1$.
Men det er umulig. Med andre ord er $\exists m\forall n\, P(m,n)$ er usant.

## Oppgave 2

i) $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{c,d,e,f\}$, $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$,
$A\cap B=\{c,d\}$, $A-B=\{a,b\}$, $(A\cup B)-(A\cap B)=\{a,b,e,f\}$,
$(A-B)\cup(B-A)=\{a,b,e,f\}$.

ii)




## Oppgave 3

i) Det er $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ forskjellige permutasjoner av tallene 1, 2, 3, 4. Dermed blir $|A| = 24$.

ii) Summen av første og siste tall i en permutasjon kan være $1+2=3$, $1+3=4$, $1+4=5$, $2+4=6$ og $3+4=7$. Andre verdier enn 3, 4, 5, 6 og 7 er det ikke mulig å få til som summen av to forskjellige tall fra 1, 2, 3 og 4. Dermed $V = \{3,4,5,6,7\}$.

iii) La $p_1 = (1,2,3,4)$, $p_2 = (1,3,2,4)$, $p_3 = (4,2,3,1)$, $p_4 = (4,3,2,1)$, $p_5 = (2,1,4,3)$, $p_6 = (2,4,1,3)$, $p_7 = (3,1,4,2)$ og $p_8 = (3,4,1,2)$. Dette er alle permutasjoner der summen av første og siste tall blir 5. Dermed $X = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8\}$ og $|X| = 8$.

iv) $f$ er ikke en-til-en siden f.eks. både $f(p_1)$ og $f(p_2)$ er lik 5. $f$ er ikke på siden det f.eks. ikke finnes noen permutasjon $p$ slik at $f(p) = 1$.

A4

## Oppgave 4

i)

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2624 | 1312 | 656 | 328 | 164 | 82 | 41 | 20 | 10 | 5 | 2 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

$2624_{10} = 101001000000_2$

ii) $A = 1010$, $B = 1011$, $C = 1100$, $D = 1101$, $E = 1110$, $F = 1111$.

$ABCDEF_{16} = 101010111100110111101111_2$

iii) $\sum_{k=0}^{4} 5 \cdot 8^k = 5\,\frac{8^5 - 1}{8-1} = 5\,\frac{32768-1}{7} = 5 \cdot 4681 = 23405$

iv) $101\,101\,101\,101\,101_2 = 55555_8 = \sum_{k=0}^{4} 5 \cdot 8^k = 23405_{10}$

$= \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{1011}_{B}\ \underbrace{0110}_{6}\ \underbrace{1101}_{D}{}_2 = 5B6D_{16}$

## Oppgave 5

a) Dette er en aritmetisk følge der differensen mellom et ledd og det foregående leddet er 3. Dermed blir $a_7 = 22$ og $a_n = 3n+1$

b) Dette er følgen av kvadrattall. Dermed blir $a_7 = 8^2 = 64$ og $a_n = (n+1)^2$.

c) Dette er en geometrisk følge der forholdet mellom et ledd og det foregående leddet er 2. Dermed blir $a_7 = 2 \cdot a_6 = 128$ og $a_n = 2^n$.

## Oppgave 6

i) $a_3 = a_2 + a_1 + a_0 = 7$, $a_4 = a_3 + a_2 + a_1 = 13$,
$a_5 = a_4 + a_3 + a_2 = 24$, $a_6 = a_5 + a_4 + a_3 = 44$

ii) Vi har 6 biter og 3 av dem skal være 1-biter.
Det gir $\binom{6}{3} = 20$ mulige bitsekvenser.

iii) Flg. bitsekvenser med lengde 6 har nøyaktig 3 biter og de står på rad:

111000, 011100, 001110, 000111

Tilsammen 4 stykker.

Det finnes 20 bitsekvenser med 3 biter. Dermed blir det $20 - 4 = 16$ med 3 biter som ikke står på rad.

iv) Vi deler dette i flg. tilfeller: a) ingen 1-biter, b) én 1-bit, c) to 1-biter, d) tre 1-biter og e) fire 1-biter. Flere enn fire 1-biter er ikke aktuelt siden det da må være minst 3 1-biter på rad.

a) 1 bitsekvens

b) $\binom{6}{1} = 6$ bitsekvenser

c) $\binom{6}{2} = 15$ bitsekvenser

d) 16 bitsekvenser (se punkt iii)

e) Her er det nok enklest å sette opp alle bitsekvenser med fire 1-biter, og så telle opp hvor mange som ikke har 3 1-biter på rad.

| | | |
|---|---|---|
| 001111 | 100111 | *110101 |
| 010111 | *101011 | *110110 |
| *011001 | *101101 | 111001 |
| 011101 | 100111 | 111010 |
| 011110 | *110011 | 111100 |

Det er 6 stykker der det ikke er 3 1-biter på rad

Tilsammen $1 + 6 + 15 + 16 + 6 = 44$

Legg merke til at det i Oppgave 6 ble samme svar i punkt iv) som verdien til $a_6$ i punkt i). Det er ikke tilfeldig. Hvis en bitsekvens med lengde minst 3 ikke har 3 1-biter på rad, så må bitsekvensen ende på 0, 01 eller 011.
Omvendt: Hvis vi har en bitsekvens med lengde $n-1$ som ikke har 3 1-biter på rad, vil vi få en slik en med lengde $n$ hvis vi setter en 0-bit bakerst. Det samme får vi hvis vi setter 01 bakerst i en slik bitsekvens med lengde $n-2$ og 011 bakerst i en med lengde $n-3$.

La $a_n$ være antallet bitsekvenser med lengde $n$ som ikke har 3 1-biter på rad. Argumentasjonen ovenfor gir:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

Vi har $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ og $a_2 = 4$ siden ingen bitsekvenser med lengde mindre enn 3 har 3 1-biter på rad.

## Oppgave 7

i) $$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+1 & 1+1+1 \\ 0 & 1 & 1+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ii) La $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Da blir $AB = \begin{bmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{bmatrix}$

Skal $AB$ bli lik $I$, må flg. gjelde:

$g=0$, $d+g=0$, $a+d+g=1$, $h=0$, $e+h=1$, $b+e+h=0$, $i=1$, $f+i=0$, $c+f+i=0$.

Det gir $g=0$, $d=0$, $a=1$, $h=0$, $e=1$, $b=-1$, $i=1$, $f=-1$ og $c=0$.

$$B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

iii) Setter vi $n=1$ i $A^n$ får vi $A^1=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ og dette er det samme som $A$. Altså stemmer dette for $n=1$.

Anta at det stemmer for $n=k$, dvs. $A^k=\begin{bmatrix}1 & k & \frac{k(k+1)}{2}\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

$$A^{k+1}=A\cdot A^k=\begin{bmatrix}1 & k+1 & \frac{k(k+1)}{2}+k+1\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Vi har at $\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Dermed $A^{k+1}=\begin{bmatrix}1 & k+1 & \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Vi ser at formelen stemmer for $n=k+1$.

Induksjonsprinsippet gir derfor at formelen stemmer for alle $n\geq 1$.

Obs Legg merke til at formelen også stemmer for $n=0$ og for negative $n$. Hvis f.eks. $n=-1$, får vi $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$ og det er nettopp den $B$-en vi fant i ii)

## Oppgave 8

$a_2 = a_1 + 12a_0 = 5 + 12 \cdot 3 = 41$

$a_3 = a_2 + 12a_1 = 41 + 12 \cdot 5 = 101$

Det karakteristiske polynomet: $r^2 = r + 12$.
Det gir $r_1 = 4$, $r_2 = -3$ og generell løsning:

$$a_n = \alpha 4^n + \beta (-3)^n .$$

$a_0 = \alpha + \beta = 3$, $a_1 = 4\alpha - 3\beta = 5$. Det gir
$\beta = 3 - \alpha$, $4\alpha - 3(3-\alpha) = 5$, $7\alpha = 14$, $\alpha = 2$
og $\beta = 1$. Dermed

$$a_n = 2 \cdot 4^n + (-3)^n, \quad a_4 = 2 \cdot 4^4 + (-3)^4 = 593.$$

## Oppgave 9

i) $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ii) $M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

iii) Vi vet at $M_R \odot M_R \odot M_R$ gir alle veier med lengde 3. Dermed blir den matrisen lik

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dermed:

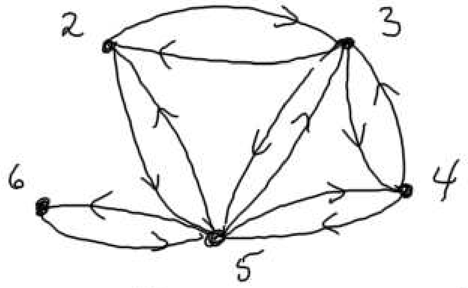
$$M_R \vee (M_R \odot M_R) \vee (M_R \odot M_R \odot M_R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A4

# Oppgave 10

i) $R = \{(2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (3,5), (4,3), (4,5), (5,2), (5,3), (5,4),$
$(5,6), (6,5)\}$

ii)




iii)

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

iv) R er ikke refleksiv. Alle diagonalelementene i $M_R$ er 0.
R er symmetrisk siden $M_R$ er en symmetrisk matrise.
R er ikke transitiv. F.eks. har vi $(2,3) \in R$ og
$(3,4) \in R$, men $(2,4) \notin R$.