

DISKRET MATEMATIKK - EKSAMEN 12. DES. 2005

LØSNINGSFORSLAG

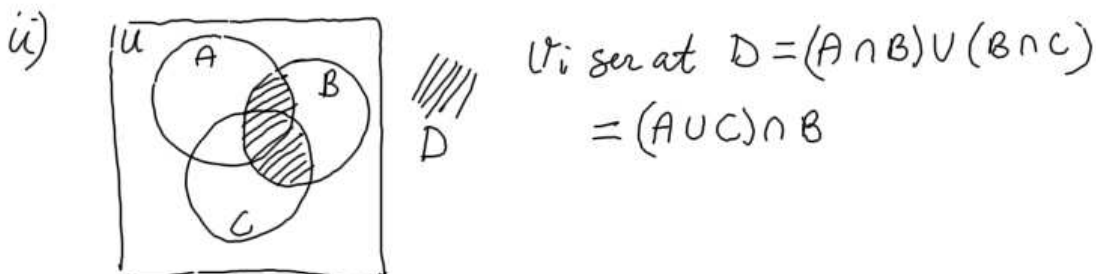
Oppgave 1

P	q	r	$\neg P$	$\neg r$	u_1	u_2	u_3	$u_1 \vee u_2 \vee u_3$	$p \vee r$	$(p \vee r) \wedge q$
S	S	S	U	U	S	U	U	S	S	S
S	S	U	U	S	U	S	U	S	S	S
S	U	S	U	U	U	U	U	U	S	U
S	U	U	U	S	U	U	U	U	S	U
U	S	S	S	U	U	U	S	S	S	S
U	S	U	S	S	U	U	U	U	U	U
U	U	S	S	U	U	U	U	U	S	U
U	U	U	S	S	U	U	U	U	U	U

identiske kolonner
Sannhetsverditabellen viser at S og $u_1 \vee u_2 \vee u_3$ er ekvivalente.

Oppgave 2

i) a) $\rightarrow 1$, b) $\rightarrow 4$, c) $\rightarrow 3$, d) $\rightarrow 7$, e) $\rightarrow 2$,
f) $\rightarrow 5$, g) $\rightarrow 6$, h) $\rightarrow 8$



Oppgave 3

Et matriseprodukt XY er definert når antall kolonner i X er lik antall rader i Y . Det betyr at det keen er AC og BA som er definert.

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

i) $a = 00110010_2 = 0011\ 0010_2 = 32_{16} = 00\ 110\ 010_2 = 62_8$
 $= 8 \cdot 6 + 2 = 50_{10}$

$b = 01010000_2 = 0101\ 0000_2 = 50_{16} = 01\ 010\ 000_2 = 120_8$
 $= 5 \cdot 16 + 0 = 80_{10}$

ii)
$$\begin{array}{r} a = 00110010 \\ b = 01010000 \\ \hline c = 10000010 \end{array}$$

$\bar{c} = 01111101$

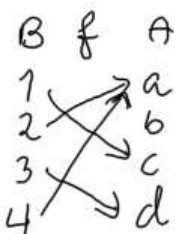
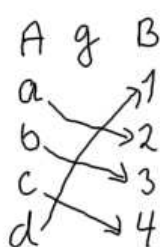
$\bar{c} + 1 = 01111110 = 126$

Tallet $c = -126$ på decimal form

iii) La $x = -126$. Da blir $130 \equiv x \pmod{256}$.

Obs: $130 = 50 + 80$.

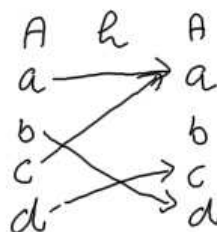
Oppgave 5



g er en-til-en siden det går bare én pil inn til hvert element i B . g er på siden det går en pil til alle elementene i B .

f er ikke en-til-en siden $f(2)$ og $f(4)$ er like. f er ikke på siden det ikke går noen pil til b .

$h(a) = f(g(a)) = f(2) = a$
 $h(b) = f(g(b)) = f(3) = d$
 $h(c) = f(g(c)) = f(4) = a$
 $h(d) = f(g(d)) = f(1) = c$



h er ikke en-til-en siden $h(a) = h(c)$. h er ikke på siden det ikke går noen pil til b .

Oppgave 6

- i) Det er 5 muligheter for første siffer og 6 muligheter for de fire neste sifrene. Dermed

$$5 \cdot 6^4 = 6480 \text{ muligheter.}$$

- ii) $2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 31$. Vi må finne

$$x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ slik at } 31 \equiv x \pmod{7}.$$

$$\text{Dvs. } x = 3 \text{ siden } 7 \text{ går opp i } 31 - 3 = 28$$

Medlemsnummeret blir 205123. Tar vi fallet

$$201523 \text{ får vi at } 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2$$

$$= 35 \not\equiv 3 \pmod{7}.$$

Oppgave 7

- i) P_1 er sann fordi 5 går opp i 0

$$P_2 \text{ er sann fordi } 5 \text{ går opp i } 32 - 2 = 30$$

$$P_3 \text{ er sann fordi } 5 \text{ går opp i } 243 - 3 = 240$$

ii)

$$\begin{array}{cccccc} & & & & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & 1 & & 2 & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} (n+1)^5 = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 \\ \text{Dvs. } a=5, b=10, c=10 \text{ og } d=5. \end{array}$$

- iii) Anta at P_k er sann, dvs. at 5 går opp i $k^5 - k$.

Vi skal vise at P_{k+1} er sann, dvs. at 5 går opp i $(k+1)^5 - (k+1)$.

$$\text{Vi har } (k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1$$

$$= k^5 - k + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k).$$

Induksjonshypotesen sier at 5 går opp i $k^5 - k$ og vi ser at 5 går opp i det andre leddet. Dermed går 5 opp i $(k+1)^5 - (k+1)$. Dvs. P_k sann medfører at P_{k+1} er sann. I punkt i) har vi vist at

P_1 er sann. Induksjonsprinsippet gir dermed at P_n er sann for alle $n \geq 1$.

La Q_n være påstanden: $n^5 - n \equiv 0 \pmod{10}$.

Q_1 er sann fordi 10 går opp i 0. Anta at Q_k er sann.

$$\begin{aligned}(k+1)^5 - (k+1) &= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1 \\ &= k^5 - k + 10(k^2 + k^3) + 5k(k^3 + 1).\end{aligned}$$

Hvis k er et partall vil 10 gå opp i $5k$. Hvis k er et oddetall vil k^3 bli et oddetall og dermed $k^3 + 1$ et partall. Da vil 10 gå opp i $5(k^3 + 1)$. Til sammen gir dette at 10 går opp i $(k+1)^5 - (k+1)$. Dermed er Q_n sann for alle $n \geq 1$.

Oppgave 8

$$a_0 = 0, a_1 = 6, a_2 = 2a_1 + 8a_0 = 2 \cdot 6 + 8 \cdot 0 = 12$$

$$a_3 = 2a_2 + 8a_1 = 2 \cdot 12 + 8 \cdot 6 = 24 + 48 = 72$$

Det karakteristiske polynomiet $r^2 = 2r + 8$ har røttene $r_1 = 4$ og $r_2 = -2$. Generell løsning:

$$a_n = \alpha 4^n + \beta (-2)^n.$$

$$a_0 = \alpha + \beta = 0, a_1 = 4\alpha - 2\beta = 6. \text{ Det gir}$$

$\alpha = 1$ og $\beta = -1$. Dermed blir løsningen

$$a_n = 4^n - (-2)^n$$

$$\text{Kontroll: } a_0 = 1 - 1 = 0, a_1 = 4 - (-2) = 6,$$

$$a_2 = 16 - 4 = 12, a_3 = 64 - (-8) = 72$$

$$a_5 = 1024 - (-32) = 1056$$

Oppgave 9

i) Det er 26 muligheter på første og siste bokstav, og $26 + 10 = 36$ muligheter de de fire andre tegnene. Dermed $26^2 \cdot 36^4$ forskjellige muligheter.

ii) Like mange bokstaver som siffer betyr 4 bokstaver og 4 siffer. Vi kan velge de resterende 2 bokstavene på $\binom{6}{2}$ mulige måter blant de 6 mulige plassene.

$$\text{Dermed } 26^2 \cdot \binom{6}{2} 26^2 \cdot 10^4 = 15 \cdot 10^4 \cdot 26^4$$

iii)

8 bokstaver: 26^8

7 bokstaver: $26^2 \binom{6}{1} 26^5 \cdot 10$

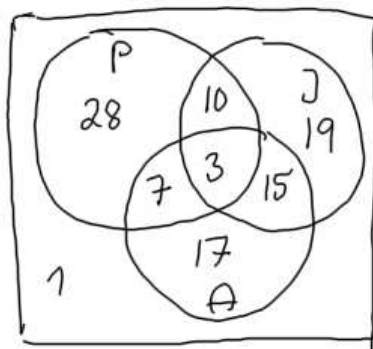
6 bokstaver: $26^2 \binom{6}{2} 26^4 \cdot 10^2$

5 bokstaver: $26^2 \binom{6}{3} 26^3 \cdot 10^3$

Svaret blir summen av disse antallene.

Oppgave 10

La P, J og A være mengdene av den som kan PHP, JSP og ASP.NET.



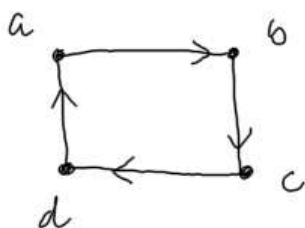
Figuren viser at kun 1 kan ingen av teknologiene, 7 stykker kan PHP og ASP.NET, men ikke JSP, 17 stykker kan kun ASP.NET.

Oppgave 11

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A \odot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 12

i) $R = \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,a)\}$



ii) $M \odot M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

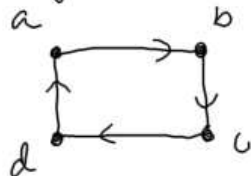
iii) $(a,a), (b,b), (c,c), (d,d)$

Matrisen $M^{[4]}$ gir alle reir med lengde 4. Dermed

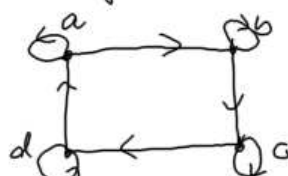
$$M^{[4]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 13

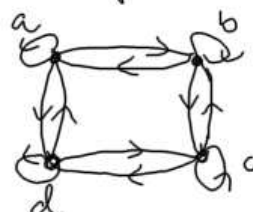
Grafen til R



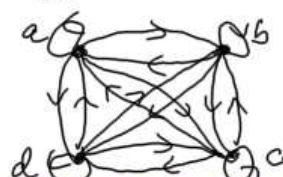
Grafen til S



Grafen til T



Grafen til U:



Oppgave 14

i)

x	y	z	x+z	(x+z)y
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	0
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

Tabellen gir

$$(x+z)y =$$

$$xyz + xy\bar{z} + \bar{x}yz$$

ii)

	yz	y $\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1		
$\bar{x}$	1			

$$f(x,y,z) =$$

$$xy + yz$$

$$= (x+z)y$$