

Løsningsforslag for eksamen i FO 019A Diskret matematikk 10.12.2004

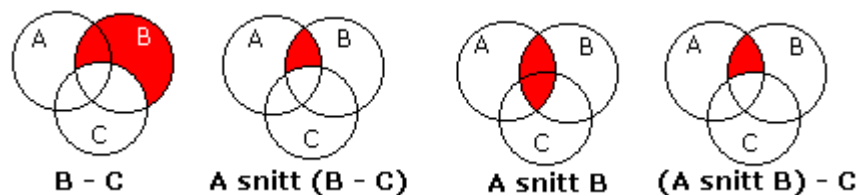
Oppgave 1

S = sant, U = usant

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$\neg p \vee \neg q \vee r$
S	S	S	U	U	S	S	S
S	S	U	U	U	U	U	U
S	U	S	U	S	S	S	S
S	U	U	U	S	S	S	S
U	S	S	S	U	S	S	S
U	S	U	S	U	U	S	S
U	U	S	S	S	S	S	S
U	U	U	S	S	S	S	S

Vi ser at $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ og $\neg p \vee \neg q \vee r$ er ekvivalente siden de har de same sannhetsverdiene.

Oppgave 2 i)



Oppgave 2 ii)

$(A \cap C) - B$ eller $(C - B) \cap A$ eller $(A - B) \cap C$

Oppgave 3

Produktet XY av to matriser X og Y eksisterer hvis og bare hvis X er en $m \times k$ -matrise og Y en $k \times n$ -matrise, dvs. antall kolonner i X må være lik antall rader i Y . Matriseproduktet XY vil, hvis det er definert, bli en $m \times n$ -matrise.

i) A er en 2×3 -matrise, B er en 3×2 -matrise og C er en 3×3 -matrise. Det betyr at AB , BA , AC og CB er definert, mens CA og BC ikke er definert. AB får dimensjon 2×2 , BA dimensjon 3×3 , AC dimensjon 2×3 og CB dimensjon 3×2 .

ii)

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

- i) $a + b = 10101100 + 11001100 = 101111000$
- ii) $101111000 = 101\ 111\ 000 = 570_8$
- iii) $101111000 = 1\ 0111\ 1000 = 178_{16}$

Oppgave 5

- i) $f(0) = 0 + 0 = 0$, $f(1) = 1 + 1 = 2$, $f(2) = 2 + 2 = 4$, $f(3) = 0 + 3 = 3$,
 $f(6) = 0 + 1 = 1$ og $f(14) = 2 + 4 = 6$.

ii) Vi har at $n \bmod 3$ alltid blir et av tallene 0, 1 eller 2 og at $n \bmod 5$ alltid blir et av tallene 0, 1, 2, 3 eller 4. Det betyr at $f(n) = (n \bmod 3) + (n \bmod 5)$ aldri kan bli mindre enn 0 eller større enn 6. Fra pkt i) ser vi at 0, 1, 2, 3, 4 og 6 hører til verdimengden. Vi ser videre at $f(4) = 1 + 4 = 5$. Dermed hører også 5 med i verdimengden. Til sammen gir dette at $V_f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Vi har $f(5) = 2 + 0 = 2 = f(1)$, dvs. f er ikke en til en. Funksjonen f er ikke på siden V_f er forskjellig fra verdidiområdet N .

Oppgave 6

- i) $a_n = 4n - 3$, $n \geq 1$. Summen av de 20 første leddene er gitt ved

$$\frac{(a_1 + a_{20})20}{2} = \frac{(1 + 77)20}{2} = 780.$$

ii) Når $i = 0$ vil den innerste løkken gå fra og med 0 til 100, dvs. 100 ganger. Når $i = 1$ vil den innerste løkken gå fra og med 1 til 100, dvs. 99 ganger. osv. Til sammen blir dette $100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 = (100 + 1) \cdot 100 / 2 = 5050$.

Oppgave 7

- i) $s_1 = (1+1)2^1 = 4$, $s_2 = (1+1)2^1 + (2+1)2^2 = 4 + 3 \cdot 4 = 4 + 12 = 16$

ii)

1) Påstanden er sann for $n = 1$ siden $(1+1)2^1 = 4 = 1 \cdot 2^{1+1}$

2) Anta at påstanden er sann for $n = k$, dvs. at $s_k = k \cdot 2^{k+1}$, $k \geq 1$.

$$s_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} (i+1)2^i = s_k + (k+1+1)2^{k+1} = k \cdot 2^{k+1} + (k+2)2^{k+1} = 2(k+1)2^{k+1} = (k+1)2^{k+2}.$$

Påstanden er sann for $n = k + 1$.

Induksjonsprinsippet sier dermed at påstanden er sann for all $n \geq 1$.

Oppgave 8

$a_2 = a_1 + 6a_0 = 0 + 6 \cdot 5 = 30$ og $a_3 = a_2 + 6a_1 = 30 + 6 \cdot 0 = 30$. Polynomet $r^2 = r + 6$ har røttene $r_1 = 3$ og $r_2 = -2$. Generell løsning: $a_n = \alpha 3^n + \beta (-2)^n$. Startbetingelsene gir $\alpha + \beta = 5$ og $3\alpha - 2\beta = 0$. Dermed $\alpha = 2$ og $\beta = 3$ og løsningen blir $a_n = 2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n$.

Oppgave 9

i) Den er $2^8 = 256$ forskjellige bitsekvenser med lengde 8.

ii) Det er sekvensene 11000000, 01100000, 00110000, 00011000, 00001100, 00000110 og 00000011. Til sammen 7 stykker.

iii) Vi kan sette to 1-biter på $\binom{8}{2} = 28$ forskjellige steder, men 7 av disse fører til at 1-bitene står ved siden av hverandre. Dermed blir det $28 - 7 = 21$ forskjellige bitsekvenser som inneholder to 1-biter som ikke står ved siden av hverandre.

Oppgave 10

Hvis vi setter A først kan de fire andre bokstavene permuteres på $4! = 24$ måter. Hvis vi setter A først og C på midten, kan de tre andre bokstavene permuteres på $3! = 6$ måter. La X være mengden av de permutasjonene der A står først, Y mengden av de der C står på midten og Z mengden av de der E står bakerst. Antallet permutasjoner der A står først eller C på midten eller E bakerst blir dermed $|X \cup Y \cup Z|$. Vi har

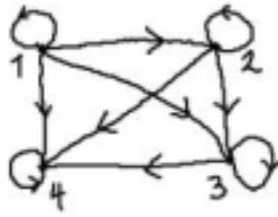
$$\begin{aligned} |X \cup Y \cup Z| &= |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z| \\ &= 24 + 24 + 24 - 6 - 6 - 6 + 2 = 56. \end{aligned}$$

Oppgave 11

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A \odot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 12

Matrisen og grafen til R .
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Relasjonen er refleksiv fordi $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ og $(4,4)$ er med.

Den er ikke symmetrisk: For eksempel er $(1,2)$ med, men ikke $(2,1)$.

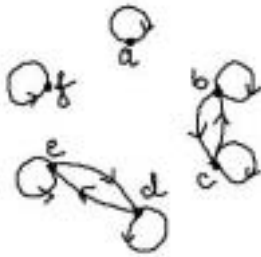
Den er antisymmetrisk fordi $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,4)$ og $(3,4)$ er med, men ikke $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,1)$, $(3,2)$, $(4,2)$ og $(4,3)$.

Den er transitiv fordi for alle tall a , b og c der (a,b) og (b,c) er i R , så er også (a,c) i R .

En relasjon definerer en partiell ordning hvis den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv. Det betyr at vår R definerer en partiell ordning.

Oppgave 13

$R = \{(a,a), (b,b), (b,c), (c,b), (c,c), (d,d), (d,e), (e,d), (e,e), (f,f)\}$



$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 14

i)

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{x} + z$	$y(\bar{x} + z)$	
1	1	1	0	1	1	xyz
1	1	0	0	0	0	
1	0	1	0	1	0	
1	0	0	0	0	0	
0	1	1	1	1	1	$\bar{x}yz$
0	1	0	1	1	1	$\bar{x}y\bar{z}$
0	0	1	1	1	0	
0	0	0	1	1	0	

Dermed blir $y(\bar{x} + z) = xyz + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$

ii) Vi ser fra i) at funksjonen $f(x, y, z) = xyz + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$ er lik den summen av minimumsledd vi fikk der. Dvs. at $f(x, y, z) = y(\bar{x} + z) = \bar{x}y + yz$.

Vi kan også løse dette ved hjelp av et Karnaugh-diagram.

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{y}\bar{z}$
x	1			
$\bar{x}$	1	1		

Den loddrette grå 2×1 -blokken svarer til yz og den vannrette grå 1×2 -blokken svarer til $\bar{x}y$. Dermed kan dette reduseres til $\bar{x}y + yz$.