

Løsningsforslag for eksamen i Diskret matematikk 10.12.2003

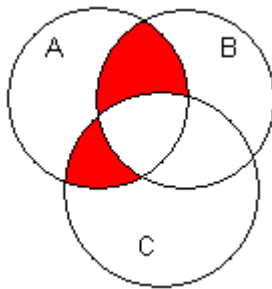
Oppgave 1

S = sant, G = usant/galt

p	q	r	$p \vee q$	$r \rightarrow (p \vee q)$	$\neg(r \rightarrow (p \vee q))$
S	S	S	S	S	G
S	S	G	S	S	G
S	G	S	S	S	G
S	G	G	S	S	G
G	S	S	S	S	G
G	S	G	S	S	G
G	G	S	G	G	S
G	G	G	G	S	G

Vi ser at hvis r er sant, p usant og q usant blir $\neg(r \rightarrow (p \vee q))$ sant. Dermed er utsagnet $\neg(r \rightarrow (p \vee q))$ **ikke** en selvmotsigelse siden det ikke alltid er usant.

Oppgave 2



Oppgave 3

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad AA^T = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

- i) $101010111100 = 1010 \ 1011 \ 1100 = ABC$
- ii) $101010111100 = 101 \ 010 \ 111 \ 100 = 5274$
- iii) $ABC = A \cdot 16^2 + B \cdot 16 + C = 10 \cdot 256 + 11 \cdot 16 + 12 = 2748$
- iv) Med 8 biter og 2-komplement representerer 11111111 et negativt tall siden den første (fra venstre) biten er 1. Vi finner hvilket negativt tall det er ved først å bytte om på alle bitene og så legge til 1, dvs. først 00000000 og deretter 00000001. Med andre ord er 11111111 det samme som -1 .

Oppgave 5

- i) $f(22) = 0$, $f(23) = 1$, $f(33) = 0$, $g(22) = 2$, $g(23) = 2$, $g(33) = 3$
- ii) $V_f = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$, $V_g = A$
- iii) f er ikke en til en siden for eksempel $f(22) = 0$ og $f(33) = 0$, g er ikke en til en siden for eksempel $g(22) = 2$ og $g(23) = 2$, f er ikke på siden V_f er forskjellig fra A , g er på siden $V_g = A$.

Oppgave 6

- 1) Påstanden er sann for $n = 0$ siden 6 går opp i 0.
- 2) Anta at påstanden er sann for $n = k$, dvs. at 6 går opp i $k^3 - k$. Med andre ord at det finnes en m slik at $k^3 - k = 6m$.

$$(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 - k + 3k^2 + 3k = 6m + 3k(k+1)$$

Siden k og $k+1$ er nabotall må et av dem være delelig med 2, dvs. det finnes l slik at $k(k+1) = 2l$. Dermed $6m + 3k(k+1) = 6m + 6l = 6(m+l)$ og $(k+1)^3 - (k+1)$ er delelig med 6. Påstanden er sann for $n = k+1$.

Induksjonsprinsippet sier dermed at påstanden er sann for all $n \geq 0$.

Oppgave 7

$a_2 = 3$ og $a_3 = 7$. Polynomet $r^2 = 3r - 2$ har røttene $r_1 = 1$ og $r_2 = 2$. Generell løsning: $a_n = \alpha + \beta 2^n$. Startbetingelsene gir $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Dermed $a_n = 2^n - 1$ og $a_{10} = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$.

Oppgave 8

i) Den første skal være en bokstav, dvs. 26 muligheter. Hver av de fire andre kan være bokstav eller siffer, dvs. $26 + 10 = 36$ muligheter på hver av dem. Til sammen $26 * 36^4 = 43670016$ mulige passord.

ii) Det er 26 muligheter for det første tegnet. Av de fire andre skal det være to siffer og to bokstaver. De to sifrene kan stå som nr 2 og 3, 2 og 4, 2 og 5, 3 og 4, 3 og 5 eller 4 og 5, dvs. på $\binom{4}{2} = 6$ steder. Det er 26 mulige bokstaver og 10 mulige siffer,

dermed $26 \binom{4}{2} 26^2 10^2 = 600 * 26^3 = 10545600$ mulige passord med nøyaktig to siffer.

iii) Totalt er det $26 * 36^4$ mulige passord. Det er $26 * 26^4$ muligheter der det ikke er noen siffer. Dermed vil differansen $26 * 36^4 - 26 * 26^4 = 43670016 - 11881376 = 31788640$ være antallet mulige passord med minst ett siffer.

Dette kunne også vært regnet ut slik:

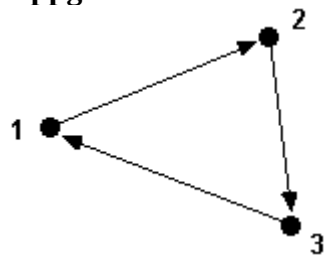
$$26 \binom{4}{1} 26^3 10^1 + 26 \binom{4}{2} 26^2 10^2 + 26 \binom{4}{3} 26^1 10^3 + 26 \binom{4}{4} 26^0 10^4$$

$$= 18279040 + 10545600 + 2704000 + 260000 = 31788640.$$

Oppgave 9

$$A^{[1]} \vee A^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^{[1]} \vee A^{[2]} \vee A^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 10



$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Refleksiv: Må ha med (1,1), (2,2) og (3,3).

Symmetrisk: Må ha med (2,1), (3,2) og (1,3)

Antisymmetrisk: R er allerede antisymmetrisk

Transitiv: Må ha med alle par av tall. Matrisen M_R er den samme som matrisen A i oppgave 9. Vi har at matrisen til den transitive lukningen R^* til R er gitt ved

$$M_{R^*} = M_R^{[1]} \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$