Innlevering i	FO929A - Matematikk
	Obligatorisk innlevering nr. 9
Innleveringsfrist	13. mai 2011 kl. 15.00
Antall oppgaver:	4

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Antall muligheter: $2^3 = \underline{\underline{8}}$

b) Kron tre gonger er ett av 8 mulige utfall; $P(\text{tre kron}) = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$.

c) $P(\text{minst en mynt}) = 1 - P(\text{tre kron}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

d) Vi bruker addisjonssetninga:

$$P(\text{minst en fungerer}) = P(\text{aggregat 1 fungerer}) + P(\text{aggregat 2 fungerer}) - P(\text{begge fungerer}) = 0,98 + 0,98 - 0,98 \cdot 0,98 = \underline{\underline{0,9996}}$$

e) $P(\text{aggregat 1 fungerer ikke}) = 1 - 0,98 = 0,02$. Tilsvarende er både sannsynligheten for at aggregat 2 ikke fungerer og for at aggregat 3 ikke fungerer det samme. Sannsynligheten for ha at ingen fungerer blir da

$$P(\text{ingen av aggregatene fungerer}) =$$
$$P(\text{agg. 1 fungerer ikke } \textit{og} \text{ agg. 2 fungerer ikke } \textit{og} \text{ agg. 3 fungerer ikke}) =$$
$$0,02 \cdot 0,02 \cdot 0,02 = \underline{\underline{0,000008}}.$$

$P(\text{minst et aggregat fungerer}) = 1 - P(\text{ingen av aggregatene fungerer}) = 1 - 0,000008 = \underline{\underline{0,999992}}$.

Oppgave 2

a) $\langle \leftarrow, 3] \cap \langle -2, 15] = \underline{\underline{\langle -2, 3]}}$

b) $\langle \leftarrow, 3] \cup \langle -2, 15] = \underline{\underline{\langle \leftarrow, 15]}}$

c) $\{0, 3, 2+\pi, \sqrt{2}\} \cap \mathbb{Q} = \underline{\underline{\{0, 3\}}}$

d) $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle = \underline{\underline{\mathbb{R} \setminus \{0\}}}$

Oppgave 3

$$y''(t) = 9,81 - \frac{k}{m} y'(t),$$

a) $y(t) = A + Be^{-\frac{k}{m}t} + 9,81\frac{m}{k}\, t$

Vi regner ut $y'(t)$ og $y''(t)$:

$$\begin{aligned} y'(t) &= 0 + Be^{-\frac{k}{m}t} \cdot \left(-\frac{k}{m}\right) + 9,81\frac{m}{k} = 9,81\frac{m}{k} - \frac{k}{m}Be^{-\frac{k}{m}t} \\ y''(t) &= -\frac{k}{m}Be^{-\frac{k}{m}t} \cdot \left(-\frac{k}{m}\right) = \frac{k^2}{m^2}Be^{-\frac{k}{m}t} \end{aligned}$$

Vi setter $y'(t)$ inn i høgre side i differensiallilkninga over og ser om det blir lik $y''(t)$:

$$\begin{aligned} & 9,81 - \frac{k}{m}y'(t) = 9,81 - \frac{k}{m}\left(9,81\frac{m}{k} - \frac{k}{m}Be^{-\frac{k}{m}t}\right) \\ & = 9,81 - 9,81 + \frac{k^2}{m^2}Be^{-\frac{k}{m}t} = 0 + y''(t) = y''(t) \end{aligned}$$

Altså er differensiallikninga oppfylt.

b) $y(t)$ gir hvor langt fallskjermhopperen har falt (i meter) etter t sekunder. Når det ikke har gått noen tid, $t = 0$, har hun heller ikke falt noe. Derfor må vi hat at $y(0) = 0$. Den deriverte av y gir farten nedover (i m/s). Det er rimelig å gå ut fra at farten nedover er null akkurat idet hun hopper ut fra flyet. Derfor setter vi at $y'(0) = 0$.

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ A + Be^0 + 9,81\frac{m}{k}\cdot 0 &= 0 \\ A + B &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(0) &= 0 \\ 9,81\frac{m}{k} - \frac{k}{m}Be^0 &= 0 \end{aligned}$$

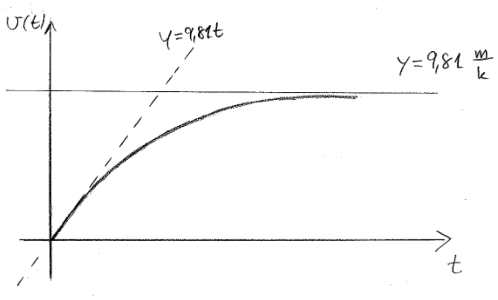
$$B = \underline{\underline{9,81\frac{m^2}{k^2}}}$$

$A = -B = \underline{\underline{-9,81\frac{m^2}{k^2}}}.$
Dermed får vi at

$$y(t) = 9,81\frac{m^2}{k^2}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1 + \frac{k}{m}t\right).$$

d) Farten $v(t) = y'(t)$:

$$v(t) = 9,81\frac{m}{k} - \frac{k}{m}\cdot 9,81\frac{m^2}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} = \underline{\underline{9,81\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)}}.$$



c) $v(t) = 9,81m/k\,(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \to 9,81m/k\,(1-0) = 9,81m/k$ når $t \to \infty$. Derfor er $\underline{\underline{y = 9,81m/k}}$ horisontal asymptote for v. Dette blir også den maksimale farten fallskjermhopperen kan få (retnok vil hun i prisippet aldri helt når denne farten). Da den maksimale farten skal vere 55 m/s får vi:

$$\begin{aligned}
9,81\frac{m}{k} &= 55 \\
k &= \frac{9,81\cdot m}{55} = \frac{9,81\cdot 73}{55} = \underline{\underline{13,0}}.
\end{aligned}$$

Oppgave 4

a) Summen av alle partall mellom 100 og 600 er ei aritmetisk rekke der det første leddet er $a_1 = 100$ og differansen er $d = 2$. Hvor mange ledd n det er i rekka kan vi finne ved

$$\begin{aligned}
a_n &= 600 \\
100 + (n-1)\cdot 2 &= 600 \\
n &= \frac{600 - 100 + 2}{2} = 251.
\end{aligned}$$

Vi finner at summen blir

$$s_{251} = 251 \cdot \frac{100+600}{2} = \underline{\underline{87\,850}}.$$

b) Summen av alle partall mellom 100 og 600 som ikke er delelige med 3 er summen av alle partall mellom 100 og 600 minus alle partall mellom 100 og 600 som er delelige med 3. At et tal skal være et partall delelig med 3 er det samme som at tallet er delelig med 6. Det første av disse tallene mellom 100 og 600 er 102, og det siste er 600. Dette tilsvarer altså en aritmetisk rekke med første ledd $b_1 = 102$ og differanse $d_2 = 6$. Indeksen n til det siste leddet finner vi ved at

$$\begin{aligned} b_n &= 600 \\ 102 + (n-1)\cdot 6 &= 600 \\ n &= \frac{600 - 102 + 6}{6} = 84. \end{aligned}$$

Summen blir $t_{84} = 84(b_1 + b_{84})/2 = 84 \cdot (102 + 600)/2 = 29\,484$. Dermed blir summen av alle partal mellom 100 og 600 som ikke er delelige med 3

$$s_{251} - t_{84} = 87850 - 29484 = \underline{\underline{58\,366}}.$$

c) Rekken er lik

$$\frac{2^3}{5^4}\left(1 + \frac{2^2}{5} + \left(\frac{2^2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2^2}{5}\right)^3 + \cdots\right).$$

Dette er en geometrisk rekke med kvotient 4/5. Den konvergerer siden $|\frac{4}{5}| < 1$. Summen er lik

$$\frac{2^3}{5^4}\frac{1}{1-4/5} = \frac{2^3}{5^4}\cdot 5 = \underline{\underline{\frac{8}{125}}}.$$

d) Vektoren $\overrightarrow{v}_2$ finner vi ved å rotere $\overrightarrow{v}_1$ 90° mot klokka og redusere lengda til 0,9. Dermed må vi ha at $\overrightarrow{v}_2 = 0,9 \cdot [0,1]$. For å finne $\overrightarrow{v}_3$, roterer vi $\overrightarrow{v}_2$ slik at retninga blir parallell med $[-1,0]$. Lengda skal være $0,9^2 = 0,81$. På denne måten finner vi at de første vektorene i rekka må være

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}_1 &= [1,0] \\ \overrightarrow{v}_2 &= 0,9 \cdot [0,1] = [0,\ 0,9] \\ \overrightarrow{v}_3 &= 0,9^2 \cdot [-1,0] = [-0,81,\ 0] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_4 &= 0,9^3 \cdot [0,-1] = [0,\ 0,9 \cdot (-0,81)] \\
\vec{v}_5 &= 0,9^4 \cdot [1,0] = [(-0,81)^2,\ 0] \\
\vec{v}_6 &= 0,9^5 \cdot [0,1] = [0,\ 0,9 \cdot (-0,81)^2] \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Lengda av $\vec{v}_n$ er $(0,9)^{n-1}$ siden lengda reduseres med en faktor $0,9$ for hver ny vektor og $|\vec{v}_1| = 1$. Det er mest hensiktsmessig å grupere vektorene etter rettningen til enhetsvektoren. Da får vi, for odde indeks, at

$$\vec{v}_{2n-1} = 0,9^{2n-2} \cdot [(-1)^{n-1}, 0] = \underline{\underline{[(-0,81)^{n-1}, 0]}}, \quad n \geq 1,$$

og når indeksen er et partall, får vi at

$$\vec{v}_{2n} = (0,9)^{2n-1} \cdot [0, (-1)^{n-1}] = \underline{\underline{[0,\ 0,9 \cdot (-0,81)^{n-1}]}}, \quad n \geq 1.$$

d) Når vi summerer alle vektorene, vil både x- og y-komponenten bli ei geometrisk rekke med kvotient $-0,9^2 = -0,81$. Det første leddet i summen er 1 for x-komponenten og $0,9$ for y-komponenten. Siden $|-0,81| < 1$, konvergerer summen av vektorer. Summen er

$$\vec{W} = \left[1 \cdot \frac{1}{1-(-0.81)}\ ,\ 0,9 \cdot \frac{1}{1-(-0,81)}\right] = \underline{\underline{\left[\frac{100}{181}, \frac{90}{181}\right]}}.$$