Innlevering i	FO929A - Matematikk
	Obligatorisk innlevering nr. 8
Innleveringsfrist	15. april 2011 kl. 15.00
Antall oppgaver:	4

Løsningsforslag

Oppgave 1

Beregn disse ubestemte integralene

a)

$$\int 5\cos(3t-2)\,dt = 5\cdot\frac{1}{3}\sin(3t-2)+C = \underline{\underline{\frac{5}{3}\sin(3t-2)}}$$

b) $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

Variabelskifte:

$u = x^2+1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$dx = \frac{1}{2x}du$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{u}x\cdot\frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u|+C = \underline{\underline{\ln\sqrt{x^2+1}+C}}$$

c) $\int x^2e^{2x}\,dx$

Delvis integrasjon:$\int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$

$u = x^2, \quad v' = e^{2x}$

$u' = 2x, \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int x^2e^{2x}\,dx = x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int 2x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}.$$

Vi finner også integralet $\int xe^{2x}\,dx$ ved delvis integrasjon:

$u = x, \quad v' = e^{2x}$

$u' = 1, \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int xe^{2x} = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C_1.$$

Altså:

$$\int x^2 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C_1\right) =$$
$$\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C}}.$$

d)

$$\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \int \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\cos(2x)) + C_1 =$$
$$\underline{\underline{-\frac{1}{4}\cos(2x) + C_1}} = -\frac{1}{4}(\cos^2 x - \sin^2 x) + C_1 = \frac{1}{2}\sin^2 x + C_2 =$$
$$-\frac{1}{2}\cos^2 x + C_3$$

Oppgava kan også løses ved delvis integrasjon. Med $u = \sin x$ og $v' = \cos x$, får vi at $u' = \cos x$ og $v = \sin x$:
$\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \sin x \cdot \sin x - \int \cos x \cdot \sin x\,dx = \sin^2 x - \int \sin x \cdot \cos x\,dx$, som gir at
$2\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \sin^2 x + C_4$
$\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \frac{1}{2}(\sin^2 x + C_4) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sin^2 x + C_2}}$.
Om vi heller vil prøve oss med variabelskifte, kan vi for eksempel gjøre det slik:
$u = \sin x$
$\frac{du}{dx} = \cos x$
$du = \cos x\,dx$
$\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C_2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sin^2 x + C_2}}$.

e) $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$.
Ved tredje kvadratsetning ser vi at $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.
Delbrøksopspalting:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \\
\frac{1}{x^2-1} &= \frac{A(x+1) + B(x-1)}{x^2-1} = \frac{(A+B)x + A - B}{x^2-1} \\
A + B = 0 &\quad \wedge \quad A - B = 1 \\
B = -A &\quad \wedge \quad A - (-A) = 1 \\
A = 1/2 &\quad \wedge \quad B = -1/2.
\end{aligned}$$

Dermed får vi at

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} \right) =$$
$$\frac{1}{2} \left(\ln|x-1| - \ln|x+1| \right) + C = \underline{\underline{\ln \sqrt{\left| \frac{x-1}{x+1} \right|} + C}}.$$

Oppgave 2

Beregn disse bestemte integralene

a) $\int_1^5 x(1-x^2)^4\,dx$

Variabelskifte:

$u(x) = 1 - x^2$

$\frac{du}{dx} = -2x$

$dx = -\frac{1}{2x}\,du$

$u(1) = 1 - 1^2 = 0, \quad u(5) = 1 - 5^2 = -24$

$$\int_1^5 x(1-x^2)^4\,dx = \int_0^{-24} u^4\,x \cdot \left(-\frac{1}{2x} \right) du =$$
$$-\frac{1}{2} \int_0^{-24} u^4\,du = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} u^5 \right]_{-24}^{0} = \frac{1}{10}(0 - (-24)^5) = \underline{\underline{\frac{3981312}{5}}}$$

b) $\int_0^1 \frac{1}{2x+3}\,dx = \left[\frac{1}{2} \ln|2x+3| \right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 3 = \underline{\underline{\ln\sqrt{\frac{5}{3}}}}$

c) $\int_0^1 \frac{2s}{\cos^2(s^2)}\,ds$

Variabelskifte:

$u(s) = s^2$

$\frac{du}{ds} = 2s$

$du = 2s\,ds$

$u(0) = 0, \quad u(1) = 1$

$$\int_0^1 \frac{2s}{\cos^2(s^2)}\,ds = \int_0^1 \frac{1}{\cos^2 u} 2s\,ds = \int_0^1 \frac{1}{\cos^2 u}\,du = [\tan u]_0^1 = \tan 1 - \tan 0 = \underline{\underline{\tan 1}}$$

d) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) e^{-x}\,dx$

Delvis integrasjon:

$u = \sin(2x), \quad v' = e^{-x}$

$u' = 2\cos(2x), \quad v = -e^{-x}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) e^{-x}\,dx = \Big[\sin(2x)(-e^{-x}) \Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2\cos(2x)(-e^{-x})\,dx =$$

$$-\sin(2\pi)e^{-\pi} - (-\sin(-2\pi)e^{-\pi}) + 2\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2x)e^{-x}\,dx =$$
$$2\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2x)e^{-x}\,dx.$$

Vi utfører delvis integrasjon også på dette integralet:
$u = \cos(2x), \quad v' = e^{-x}$
$u' = -2\sin(2x), \quad v = -e^{-x}$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2x)e^{-x}\,dx = \Big[-\cos(2x)e^{-x}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}(-2\sin(2x))\cdot(-e^{-x})\,dx =$$
$$-\cos(2\pi)e^{-\pi} - (-\cos(-2\pi)e^{\pi}) - 2\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)e^{-x}\,dx =$$
$$e^{\pi} - e^{-\pi} - 2\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)e^{-x}\,dx$$

Altså får vi at

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)e^{-x}\,dx = 2\left(e^{\pi} - e^{-\pi} + 2\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)e^{-x}\,dx\right) =$$
$$2\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) - 4\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)e^{-x}\,dx$$

Dette gir igjen at

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)e^{-x}\,dx + 4\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)e^{-x}\,dx = 2\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)$$
$$5\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)e^{-x}\,dx = 2\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)e^{-x}\,dx = \underline{\underline{\frac{2}{5}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}}.$$

e)

$$\int_0^p \left(\sin\left(\frac{2\pi}{p}(x-c)\right) + d\right)\,dx = \left[-\frac{p}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{p}(x-c)\right) + d\cdot x\right]_0^p =$$
$$-\frac{p}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{p}(p-c)\right) + d\cdot p - \left(-\frac{p}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{p}(0-c)\right) + d\cdot 0\right)$$
$$-\frac{p}{2\pi}\left(\cos\left(2\pi - \frac{2\pi c}{p}\right) - \cos\left(-\frac{2\pi c}{p}\right)\right) + d\cdot p =$$
$$-\frac{p}{2\pi}\left(\cos\left(\frac{2\pi c}{p}\right) - \cos\left(\frac{2\pi c}{p}\right)\right) + dp = dp.$$

Oppgave 3
Påstand: *Av alle mennesker som noen gang har levd, er de fleste i live fremdeles.*

Vi antar at verdens befolkning, N, som funksjon av årstallet t vokser eksponentielt. (Dette er – heldigvis – ikke tilfelle lenger.) Dermed kan vi skrive $N(t)$ som

$$N(t) = N_0 e^{kt}.$$

Vi skal ha at $N(1700) = 600\,000\,000$ og at $N(2000) = 6\,000\,000\,000$. Dermed kan vi bestemme k:

$$\begin{aligned} N_0 e^{k\cdot 1700} = 600\,000\,000 \quad &\wedge \quad N_0 e^{k\cdot 2000} = 6\,000\,000\,000 \\ \frac{N_0 e^{k\cdot 2000}}{N_0 e^{k\cdot 1700}} &= \frac{6\,000\,000\,000}{600\,000\,000} \\ e^{k\cdot(2000-1700)} &= 10 \\ 300k &= \ln 10 \\ k &= \frac{\ln 10}{300} \approx 0,007675 \end{aligned}$$

Vi kan bestemme N_0, befolkninga ved $t = 0$, slik:

$$\begin{aligned} N_0 e^{k\cdot 1700} &= 600\,000\,000 \\ N_0 &= \frac{600\,000\,000}{e^{k\cdot 1700}} \approx 1\,293 \end{aligned}$$

Altså levde det drygt 1000 mennesker ved Kristi fødsel i følge denne litt vel enkle modellen.

Innenfor antagelsene over kan vi finne ut hvor mange år som har blitt levd til sammen ved å integrere $N(t)$ fra menneskets oprinnelse fram til nå. Selvsagt er det vanskelig å si hvor lenge det har eksistert mennesker. Homo sapeiens har eksistert i flere hundre tusener av år, men man kan også argumentere for at det har eksistert mennesker i flere millioner år. I vår modell spiller det ikke så stor rolle hva vi setter som nedre itegrasjonsgrense siden folketallet avtar veldig rakst når vi går bakover i tid. Vi setter l som den nedre grensen og integrerer fram til i år:

$$\int_l^{2011} N_0 e^{kt} dt = N_0 \left[\frac{1}{k} e^{kt}\right]_l^{2011} = \frac{N_0}{k}\left(e^{2011k} - e^{kl}\right).$$

Dersom vi lar $l \to -\infty$, vil det siste leddet i parantesen gå mot null, slik at vi får at antall år som har blitt levd er

$$\frac{N_0}{k} e^{2011k} \approx \frac{1293}{0,007675} e^{2011\cdot 0,007675} = 8,506 \cdot 10^{11}.$$

Dersom vi setter en gjennonsnittlig levetid, kan vi ut fra dette estimere hvor mange liv som har blitt levd. I følge statistisk sentralbyrå, er gjennomsnittlig levealder i Norge i dag ca. 83 år for kvinner og ca. 79 for menn. Selsvagt er disse tallene langt fra representative i et historisk perspektiv. Gjennomsnittlig levealder variere mye fra land til land, og den har variert svært mye gjennom historien – også i de siste århundrene. For eksempel ser det ut til at gjennonsnittlig levealder var under 30 år i det romerske imperiet. Så hvis vi velger en gjennonsnittlig levealder på 45 år, er det neppe for høgt i denne sammenhengen. Dermed får vi anslagsvis at antall mennesker som har levd er

$$\frac{\frac{N_0}{k}e^{2011k}}{T} \approx 1,890 \cdot 10^{10}$$

der $T = 45$. Forholdet mellom antall mennesker som lever og antall mennesker som har levd blir da

$$\frac{N(2011)}{\frac{\frac{N_0}{k}e^{2011k}}{T}} = Tk\,\frac{N_0 e^{2011k}}{N_0 e^{2011k}} = Tk \approx 45 \cdot 0,007675 = 0,345 < \frac{1}{2}.$$

(Legg merke til at svaret over blir uavhengig av hvilket årstall man setter inn.) Altså tyder dette på at påstanden over er feil. Et argument som styrker denne konklusjonen er at modellen vår undervurderer folketallet grovt når vi går mange hundre, for ikke å snakke om tusen, år tilbake. En annen nokså stor svakhet med modellen er at forventet levetud har variert gjenom historia, noe modellen som sagt ikke tar høyde for. Men i alle tilfeller er det jo interessant at disse to tallene – hvor mange mange mennesker som lever og hvor mange mennesker som har levd – er samenlignbare i det hele tatt.

Oppgave 4
$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

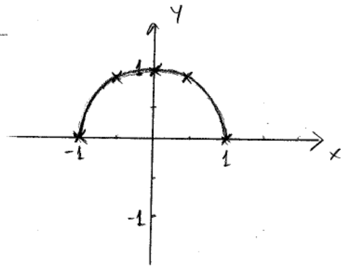
a) Vi vet at vi bare kan ta kvadratrota av ikke-negative tall. Vi må derfor kreve at

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &\geq 0 \\ x^2 &\leq 1 \\ -1 \leq x &\leq 1 \end{aligned}$$

Definisjonsmengda blir $\underline{\underline{D_f = [-1, 1]}}$.

b) Vi ser av grafen at området mellom grafen og x-aksen er en halv “disk” med radius 1. Arealet av en “disk” er πr^2 der r er radien. Vi får, siden

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	0	$0{,}9$	1	$0{,}9$	0



$f(x) \geq 0$ i intevallet, at

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$$

c)

$$\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} x\right)' = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x\right)' =$$
$$\frac{1}{2}\left(1 \cdot \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x^2-x^2+1}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} = f(x) \quad \text{(q.e.d.)}$$

d)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} x\right)' &= f(x) \quad \Leftrightarrow \\ \int f(x)\,dx &= \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} x + C \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} x\right]_{-1}^{1} =$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{1-1^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} 1 - \left(\frac{-1}{2}\sqrt{1-(-1)^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}(-1)\right) =$$
$$0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

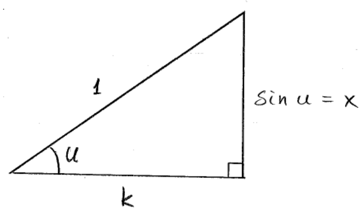
e) Vi skal vise at $(\sin^{-1} x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$.

Vi kaller funksjonen vi skal derivere for $u(x)$;

$$u(x) = \sin^{-1} x.$$

Vi veit at $\sin(\sin^{-1} x) = x$. Bruker vi kjerneregelen på dette uttrykket, får vi at

$$\begin{aligned} (\sin(u(x)))' &= x' \\ \cos(u(x)) \cdot u'(x) &= 1 \\ u'(x) &= \frac{1}{\cos u} \\ \left(\sin^{-1} x\right)' &= \frac{1}{\cos\left(\sin^{-1} x\right)} \end{aligned}$$



$\cos u = \frac{k}{1} = k$

Pytagoras: $k^2 + x^2 = 1$

$k = \sqrt{1 - x^2}$

Vi kan finne et uttrykk for $\cos u$ ved å se på en rettvinkla trekant med hypotenus lik 1 der en av vinklene er u. Siden $\sin u = x$, må den motstående kateten ha x som lengde. Lenga av den hosliggende kateten kan vi finne ved Pytagoras til å være $\sqrt{1-x^2}$. Ved å se på trekanten, finner vi at denne lengda er det samme som $\cos u$. Altså: $\cos u = \sqrt{1-x^2}$. Dette gjelder også dersom $\sin^{-1} x$ skulle være negativ siden $\cos x$ er ikke-negativ i hele verdimengda til $\sin^{-1} x$. Dermed får vi at

$$\left(\sin^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{(q.e.d.)}.$$