Innlevering i FO929A - Matematikk
Obligatorisk innlevering nr. 7
Innleveringsfrist 1. april 2011 kl. 15.00
Antall oppgaver: 5

Løsningsforslag

Oppgave 1
Løs likningene for x

a)

$$\begin{aligned} e^{3x} &= \ln 2 \\ 3x &= \ln(\ln 2) \\ x &= \underline{\underline{\frac{\ln(\ln 2)}{3}}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} &= 1 \\ (e^x)^2 - 1 &= e^x \\ (e^x)^2 - e^x - 1 &= 0 \\ e^x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

e^x kan aldri være negativ, derfor vil ikke $e^x = (1 - \sqrt{5})/2$ gi noen løsning.

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x &= \underline{\underline{\ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)}} \approx 0,481 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \ln|x - 1| &= -2 \\ |x - 1| &= e^{-2} \\ x - 1 = e^{-2} &\vee x - 1 = -e^{-2} \\ x = \underline{\underline{1 + e^{-2}}} &\vee x = \underline{\underline{1 - e^{-2}}} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\ln(2) + \ln(x+2) &= 2\ln(x+1) \\
\ln(2(x+2)) &= \ln(x+1)^2 \\
2(x+2) &= (x+1)^2 \\
2x+4 &= x^2+2x+1 \\
x^2 &= 3 \\
x = \sqrt{3} &\vee \; x = -\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Vi setter prøve på svaret:
$\underline{x = \sqrt{3}}$: Venstre side blir $\ln 2 + \ln(\sqrt{3}+2) = \ln(2\sqrt{3}+4)$. Høyre side blir $2\ln(\sqrt{3}+1) = \ln(\sqrt{3}+1)^2 = \ln(\sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3}+1) = \ln(2\sqrt{3}+4)$. Vi ser at venstre og høyre side blir like.
$\underline{x = -\sqrt{3}}$: På høyre side får vi 2 ganger logaritmen til $-\sqrt{3}+1$, som er et negativt tall. ln-funksjonen er ikke definert for negative tall, så løsningen må forkastes.
Altså: $\underline{\underline{x = \sqrt{3}}}$.

Oppgave 2

a) $f(x) = 2 + 7x - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3$
$f'(x) = 7 - 3\cdot 2x + \frac{1}{2}\cdot 3x^2 = \underline{\underline{7 - 6x + \frac{3}{2}x^2}}$
$f''(x) = -6 + \frac{3}{2}\cdot 2x = \underline{\underline{-6+3x}}$
$f'''(x) = \underline{\underline{3}}$
$f^{(4)}(x) = \underline{\underline{0}}$
Siden $f^{(4)}(x) = 0$, vil også vi også ha at $\underline{\underline{f^{(n)}(x) = 0}}$ for alle $n \geq 4$.

b) $f(x) = 2x + x^2e^{-x} + \cos(\pi x/180)$
$f'(x) = 2 + (x^2)'\cdot e^{-x} + x^2\cdot(e^{-x})' + (-\sin(\pi x/180))\cdot(\pi x/180)' =$
$2 + 2xe^{-x} + x^2e^{-x}\cdot(-x)' - \sin(\pi x/180)\cdot\frac{\pi}{180} = \underline{\underline{2 + 2xe^{-x} - x^2e^{-x} - \frac{\pi}{180}\sin(\pi x/180)}}$

c) $(x^x)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)' = x^x\cdot\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = \underline{\underline{x^x(\ln x + 1)}}$

d) $(x\ln(\ln x))' = (x)'\cdot\ln(\ln x) + x\cdot(\ln(\ln x))' = \ln(\ln x) + x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)' =$
$\ln(\ln x) + x\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \underline{\underline{\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}}}$

Oppgave 3
Finn de ubestemte integralene nedenfor

a) $\int (x+x^2+x^3)\,dx = \frac{1}{1+1}x^{1+1}+\frac{1}{2+1}x^{2+1}+\frac{1}{3+1}x^{3+1}+C = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+C}}$

b) $\int \frac{4x^3-x^2+1}{2x-1}\,dx$
Polynomdivisjon:

$$\begin{array}{llllll}
(4x^3 & -x^2 & & +1) & :(2x-1) & = 2x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{5}{4(2x-1)} \\
-(4x^3 & -2x^2) & & & & \\
 & x^2 & & & & \\
 & -(x^2 & -\frac{1}{2}x) & & & \\
 & & \frac{1}{2}x & +1 & & \\
 & & -(\frac{1}{2}x & -\frac{1}{4}) & & \\
 & & & \frac{5}{4} & &
\end{array}$$

$$\int \frac{4x^3-x^2+1}{2x-1}\,dx = \int \left(2x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{5}{4(2x-1)}\right)dx =$$
$$2\cdot\frac{1}{2+1}x^{2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+1}x^{1+1}+\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\int\frac{1}{2x-1}\,dx =$$
$$\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C =$$
$$\underline{\underline{\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{5}{8}\ln|2x-1|+C}}$$

c)

$$\int -13\cos(4(x-1))\,dx = -13\int\cos(4x-4)\,dx = -13\cdot\frac{1}{4}\sin(4x-4)+C =$$
$$\underline{\underline{-\frac{13}{4}\sin(4x-4)+C}}$$

d)

$$\int\left(-3\sqrt[5]{x}+\frac{11}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(-3x^{1/5}+11x^{-1/2}\right)dx =$$
$$-3\cdot\frac{1}{\frac{1}{5}+1}x^{1/5+1}+11\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-1/2+1}+C = \underline{\underline{-\frac{5}{2}x^{6/5}+22\sqrt{x}+C}}$$

Oppgave 4

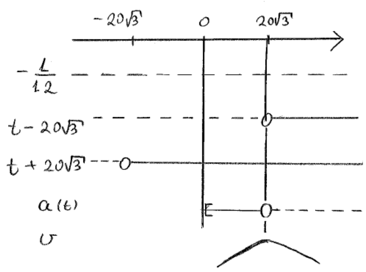
a) Akselerasjonen $a(t)$ er den tidsderiverte av farten $v(t)$;

$$a(t) = v'(t) = 1 - \frac{1}{3600} \cdot 3t^2 = \underline{\underline{1 - \frac{t^2}{1200}}}$$

b) Farten er størst når den deriverte av farten, $a(t)$, skifter fortegn fra positiv til negativ. $a(t)$ kan faktoriseres ved hjelp av 3. kvadratsetning:

$$a(t) = -\frac{1}{1200}(t^2 - 1200) = -\frac{1}{12}(t - \sqrt{1200})(t + \sqrt{1200}) = -\frac{1}{12}(t - 20\sqrt{3})(t + 20\sqrt{3})$$

Fortegnskjema:



Vi ser at farten er maksimal for $t = 20\sqrt{3} \approx 34,641$, altså etter $\underline{\underline{34{,}641 \text{ s}}}$.

$$v(20\sqrt{3}) = 20\sqrt{3} - \frac{(20\sqrt{3})^3}{3600} \approx 23,094$$

Farten er da $\underline{\underline{23{,}094 \text{ m/s}}}$.

c) Kjørelengda Δs blir det bestemte integralet av farten fra $t = 0$ til $t = 60$:

$$\Delta s = \int_0^{60} v(t)\,dt = \int_0^{60} \left(t - \frac{t^3}{3600}\right) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3600} \cdot \frac{1}{4}t^4\right]_0^{60}$$

$$\left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{14400}t^4\right]_0^{60} = \frac{1}{2} \cdot 60^2 - \frac{1}{14400} \cdot 60^4 - 0 = 900$$

Astrid har kjørt $\underline{\underline{900 \text{ m}}}$.

Oppgave 5

a) $y''(t) + \frac{k}{m} y(t) = 0$

Vi deriverer y_1 to ganger:

$y_1(t) = \sin\left(\sqrt{k/m} \cdot t\right)$

$y_1'(t) = \cos\left(\sqrt{k/m} \cdot t\right) \cdot (\sqrt{k/m} \cdot t)' = \sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{k/m} \cdot t\right)$

$y_1''(t) = \sqrt{\frac{k}{m}} \left(-\sin\left(\sqrt{k/m} \cdot t\right)\right) \cdot (\frac{k}{m} \cdot t)' = -\frac{k}{m} \sin\left(\sqrt{k/m} \cdot t\right) = -\frac{k}{m} y_1(t)$

Tilsvarende for y_2:

$y_2(t) = \cos\left(\sqrt{k/m} \cdot t\right)$

$y_2'(t) = -\sin\left(\sqrt{k/m} \cdot\right) \cdot (\sqrt{k/m} \cdot t)' = -\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{k/m} \cdot t\right)$

$y_2''(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{k/m} \cdot t\right) \cdot \left(\sqrt{k/m} \cdot t\right)' = -\frac{k}{m} \cos\left(\sqrt{k/m} \cdot t\right) = -\frac{k}{m} y_2$

Dermed får vi at

$$y_1''(t) + \frac{k}{m} y_1(t) = -\frac{k}{m} y_1(t) + \frac{k}{m} y_1(t) = 0$$

og

$$y_2''(t) + \frac{k}{m} y_2(t) = -\frac{k}{m} y_2(t) + \frac{k}{m} y_2(t) = 0$$

Atså opfyller både y_1 og y_2 differensiallikninga.

b) $y(t) = a \sin\left(\sqrt{k/m} \cdot t\right) + b \cos\left(\sqrt{k/m} \cdot t\right)$

Vi ser at $y(t) = a y_1(t) + b y_2(t)$. Dermed får vi (ved linearitet) at

$$y''(t) = a y_1''(t) + b y_2''(t) = a \cdot \left(-\frac{k}{m}\right) y_1(t) + b \cdot \left(-\frac{k}{m}\right) y_2(t) =$$
$$-\frac{k}{m} \left(a y_1(t) + b y_2(t)\right) = -\frac{k}{m} y(t)$$

Dermed får vi at

$$y''(t) + \frac{k}{m} y(t) = -\frac{k}{m} y(t) + \frac{k}{m} y(t) = 0$$

Altså opfyller $y(t)$ differensiallikninga.

c) $y''(t) + r y'(t) + \frac{k}{m} y(t) = 0$

Vi sjekker først at kravet $y(0) = 0$ er oppfylt:

$$y(0) = a e^{-c \cdot 0} \sin(d \cdot 0) = a \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Så regner vi ut den første- og andrederiverte til $y(t)$:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= ae^{-ct}\sin(dt) \\
y'(t) &= a\left(\left(e^{-ct}\right)'\cdot\sin(dt) + e^{-ct}\cdot(\sin(dt))'\right) = \\
&\quad a\left(e^{-ct}(-c)\cdot\sin(dt) + e^{-ct}\cot(dt)\cdot(dt)'\right) = \\
&\quad ae^{-ct}\left(-c\sin(dt) + d\cos(dt)\right) \\
y''(t) &= a\left(\left(e^{-ct}\right)'\cdot(-c\sin(dt)+d\cos(dt)) + e^{-ct}\cdot(-c\sin(dt)+d\cos(dt))'\right) = \\
&\quad a\left(e^{-ct}(-c)\cdot(-c\sin(dt)+d\cos(dt)) + e^{-ct}\cdot(-c\cos(dt)\cdot d + d(-\sin(dt))\cdot d)\right) = \\
&\quad ae^{-ct}\left(c^2\sin(dt) - cd\cos(dt) - cd\cos(dt) - d^2\sin(dt)\right) = \\
&\quad ae^{-ct}\left((c^2-d^2)\sin(dt) - 2cd\cos(dt)\right)
\end{aligned}
$$

Vi setter dette inn i differensiallikninga:

$$
\begin{aligned}
&y''(t) + ry'(t) + \frac{k}{m}y(t) = \\
&ae^{-ct}\left((c^2-d^2)\sin(dt) - 2cd\cos(dt)\right) + \\
&rae^{-ct}\left(-c\sin(dt) + d\cos(dt)\right) + \frac{k}{m}ae^{-ct}\sin(dt) = \\
&ae^{-ct}\left[(c^2-d^2)\sin(dt) - 2cd\cos(dt) - rc\sin(dt) + rd\cos(dt) + \frac{k}{m}\sin(dt)\right] = \\
&ae^{-ct}\left[\left(c^2-d^2-rc+\frac{k}{m}\right)\sin(dt) + (-2cd+rd)\cos(dt)\right] = 0
\end{aligned}
$$

Siden uttrykket skal bli 0, må koeffisientene foran både sin-leddet og cos-leddet bli null:

$$c^2 - d^2 - rc + \frac{k}{m} = 0 \quad \wedge \quad -2cd + rd = 0$$

Den siste likninga gir at $d(r-2c) = 0$, så enten må vi ha at $d = 0$ eller at $r - 2c = 0$. Det første gjør funksjonen y veldig uninteressant siden den blir 0 hele tida. Vi velger den andre løsningen, $r - 2c = 0$, som gir at $\underline{\underline{c = r/2}}$. Om vi setter dette inn i likninga $c^2 - d^2 - rc + \frac{k}{m} = 0$, får vi

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 - d^2 - r\frac{r}{2} + \frac{k}{m} = 0,$$

som igjen gir at

$$
\begin{aligned}
\frac{r^2}{4} - d^2 - \frac{r^2}{2} + \frac{k}{m} &= 0 \\
d^2 &= \frac{k}{m} - \frac{r^2}{4}
\end{aligned}
$$

Dersom vi velger positiv d (negativ d tilsvarer motsatt fortegn på a), får vi at $\underline{\underline{\mathrm{d}=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{r^2}{4}}}}$. Med disse valgene av c og d er differensiallikninga oppfylt.