Innlevering i matematikk

Obligatorisk innlevering nr. 6
Løsningsforslag

Oppgave 1

Her har det blitt brukt forskjellige typer notasjon når det gjelder kjerneregelen.
Benytt den skrivemåten du er mest konfortabel med.

$a'(x) = \underline{\underline{6x+4}}$

$b(x) = u^8 \quad \text{med} \quad u(x) = 3x^2 + 4x - 7$

$\dfrac{db}{dx} = \dfrac{db}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = 8u^7 \cdot (6x+4) = 8\left(3x^2+4x-7\right)^7 \cdot (6x+4) = \underline{\underline{16(3x+2)(3x^2+4x-7)^7}}$

$c(x) = \sin u \quad \text{med} \quad u(x) = x^2 + 2x$

$\dfrac{dc}{dx} = \dfrac{dc}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = \cos u \cdot (x^2+2x)' = \cos(x^2+2x) \cdot (2x+2) = \underline{\underline{2(x+1)\cos(x^2+2x)}}$

$d(x)$ – metode I

$d(x) = u^2 \quad \text{med} \quad u(x) = \sin(x^2+2x) = \sin v \quad \text{med} \quad v(x) = x^2 + 2x$

$\dfrac{dd}{dx} = \dfrac{dd}{du} \cdot \dfrac{du}{dv} \cdot \dfrac{dv}{dx} = 2u \cdot \cos v \cdot (2x+2) = 2\sin(x^2+2x) \cdot \cos(x^2+2x) \cdot (2x+2) =$

$4(x+2)\sin(x^2+2x)\cos(x^2+2x) = \underline{\underline{2(x+2)\sin(2x^2+4x)}}$

$d(x)$ – metode II

$d'(x) = 2\sin(x^2+2x) \cdot (\sin(x^2+2x))' = 2\sin(x^2+2x) \cdot \cos(x^2+2x) \cdot (x^2+2x)' =$

$2\sin(x^2+2x)\cos(x^2+2x) \cdot (2x+2) = 4(x+2)\sin(x^2+2x)\cos(x^2+2x) = \underline{\underline{2(x+2)\sin(2x^2+4x)}}$

$e'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \underline{\underline{\ln x + 1}}$

$f'(x) = e^x \cdot \cos x + e^x \cdot (-\sin x) = \underline{\underline{e^x(\cos x - \sin x)}}$

$g(x) = e^u \quad \text{med} \quad u(x) = -2x^2$

$g'(x) = e^{-2x^2} \cdot (-2x^2)' = \underline{\underline{-4xe^{-2x^2}}}$

$h(x)$ – metode I

$h(x) = \sin u \quad$ med $\quad u(x) = \cos(x^2) = \cos v \quad$ med $\quad v = x^2$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \cos u \cdot (-\sin v) \cdot 2x = \cos(\cos(x^2)) \cdot (-\sin(x^2)) \cdot 2x =$$
$$\underline{\underline{-2x \sin(x^2) \cos(\cos(x^2))}}$$

$h(x)$ – metode II

$$h'(x) = \cos(\cos(x^2)) \cdot (\cos(x^2))' = \cos(\cos(x^2)) \cdot (-\sin(x^2)) \cdot (x^2)' = \underline{\underline{-2x \sin(x^2) \cos(\cos(x^2))}}$$

$$i'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x - \tan x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x}}{\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x}}}$$

Oppgave 2

Løs disse likhetene og ulikhetene

a)

$$\begin{aligned} 5 \cdot 7^x &= 245 \\ 7^x &= \frac{245}{5} = 49 = 7^2 \\ (x \ln 7 &= \ln 7^2 = 2 \ln 7) \\ & \underline{\underline{x = 2}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lg x - 4 &= \lg(10x^2) \\ \lg x - 4 &= \lg 10 + \lg x^2 = 1 + 2 \lg x \\ 2 \lg x - \lg x &= -4 - 1 = -5 \\ \lg x &= -5 \\ \underline{\underline{x = 10^{-5}}} & \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
5\cdot 4^x - 16^x &= 6\\
5\cdot 4^x - (4^2)^x - 6 &= 0\\
-(4^x)^2 + 5\cdot 4^x - 6 &= 0\\
(4^x)^2 - 5\cdot 4^x + 6 &= 0\\
4^x &= \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \frac{5\pm 1}{2}
\end{aligned}$$

$$4^x = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{eller} \quad 4^x = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$x\ln 4 = \ln 2 \quad \text{eller} \quad x\ln 4 = \ln 3$$

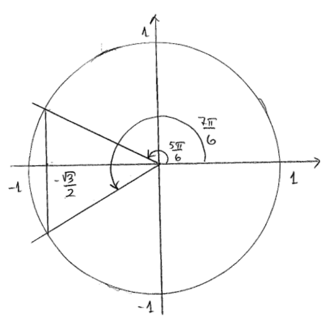
$$x = \frac{\ln 2}{\ln 2^2} = \frac{\ln 2}{2\ln 2} = \frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad x = \frac{\ln 3}{\ln 4}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad x = \frac{\ln 3}{\ln 4} \approx 0,792}}$$

d)

$$\begin{aligned}
-\sqrt{3}\cos x &= \frac{3}{2}, \quad x \in [0, 2\pi\rangle\\
\cos x &= \frac{3}{2\cdot(-\sqrt{3})} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \pi - \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}
\end{aligned}$$

Siden x skal ligge i første omløp får vi løsningen $\underline{\underline{x = \frac{5\pi}{6} \text{ eller } x = 2\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}}}$.



e)

$$\begin{aligned}
-\sqrt{3}\cos x &> \frac{3}{2}, \quad x \in [0, 2\pi\rangle\\
\cos x &< -\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Av enhetssirkelen ser vi at $\underline{\underline{\frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}}}$.

Oppgave 3

Finn alle asymptoter til disse funksjonene

a) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$
Vi vet at funksjonen $\ln x \to -\infty$ når $x \to 0^+$. Dermed vil $f(x) \to -\infty$ når $x^2 - 1 \to 0^+$. $x^2 - 1$ er 0 når $x = \pm 1$. Vi får at $f(x) \to -\infty$ når $x \to -1^-$ og når $x \to +1^+$.
$\underline{\underline{x = -1 \text{ og } x = 1}}$ er vertikale asymptoter for f. f har ingen horisontale eller skrå asymptoter.

b) $g(x) = \tan \frac{x}{2}, \quad x \in [0, 3\pi\rangle$
Vi vet at funksjonen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \to \pm\infty$ når $x \to \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, der n er et heltall. (Her er $\cos x = 0$ og $\sin x = \pm 1$.) Dermed vil $g(x)$ gå mot $\pm\infty$ når $\frac{x}{2} \to \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \\ x &= \pi + n \cdot 2\pi \\ n = 0: \quad x &= \pi \\ n = 1: \quad x &= \pi + 2\pi = 3\pi \end{aligned}$$

$\underline{\underline{x = \pi \text{ og } x = 3\pi}}$ er vertikale asymptoter for g. g har ingen horisontale eller skrå asymptoter.

c) $h(x) = \frac{x^2 + \ln x}{x^2 - 1}$
$\ln x \to -\infty$ når $x \to 0^+$. Dermed har vi også at $h(x) \to -\infty$ når $x \to 0^+$. Videre ser vi at nevneren er null når $x = \pm 1$. Vi kan ikke tillate at $x = -1$, for $\ln x$ er ikke definert for negative x. Når $x = 1$, blir tellern $1^2 + \ln 1 = 1 \neq 0$. Dermed vil $h(x) \to \pm\infty$ når $x \to 1$.

$\underline{\underline{x = 0 \text{ og } x = 1}}$ er vertikale asymptoter for h.
For å finne eventuelle andre asymptoter, lar vi $x \to +\infty$:

$$h(x) = \frac{x^2 + \ln x}{x^2 - 1} = \frac{1 + \frac{\ln x}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \to \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$$

Vi har her brukt at $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$. Denne grensa blir null p.g.a. at x^2 vokser mye raskere enn $\ln x$. (Dette kan en se ved å plotte funksjonen, for eksempel.) En kan vise dette ved å først observere at $(x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} > 0$ for alle $x > 0$. For $x = 1$ er $x > \ln x$. Dermed, siden forskjellen mellom x og $\ln x$ øker, vil x alltid være større enn $\ln x$ for $x > 1$ (og $x > 0$). Dermed er $\frac{\ln x}{x} < 1$ for alle $x > 1$. Vi ser også at $\frac{\ln x}{x}$ er større enn 0 for $x > 1$.

Dermed har vi at $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$ for alle $x > 1$. Dermed, siden $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ må vi også ha at $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$.

$\underline{\underline{y = 1}}$ er horisontal asymptote for h.

d) Vi vet at logaritmefunksjonen bare er definert for positive argument. Dermed må vi kreve at $x^2 - 1 > 0$ for at f skal være definert. Altså,

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 1 & > & 0 \\ x^2 & > & 1 \\ |x| & > & 1 \\ x < -1 & \text{eller} & x > 1 \end{array}$$

Definisjonsmengden for f blir $\underline{\underline{D_f = \langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]}}$.

For at logaritmefunksjonen i h skal være veldefinert, må vi kreve at $x > 0$. Videre har vi sett at nevneren blir null når $x = \pm 1$. Dermed må vi også kreve at $x \neq \pm 1$. (Kravet $x \neq -1$ er automatisk oppfylt når vi krever at $x > 0$.)

Dermed blir definisjonemengden til h $\underline{\underline{D_h = \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle = \langle 0, \rightarrow \rangle \setminus \{1\}}}$.

Oppgave 4

a) $N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/a}$

Vi ser at dette er en eksponentialfunksjon, $N(t) = N_0((1/2)^{1/a})^t$. Videre ser vi at N blir halvert for hver gang t har auka med halveringstida a. Vi ser for eksempel at $N(a) = N_0 \cdot (1/2)^{a/a} = N_0/2$. Når t har auka med ei halveringstid til, $t = 2a$, får vi at $N = N_0 \cdot (1/2)^{2a/a} = N_0/4$ – altså at N har blitt halvert to ganger. På samme måte, får vi at etter n halveringstider er $N = N_0/2^n$.

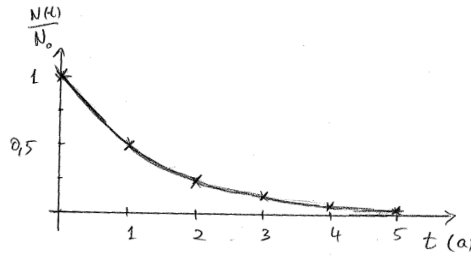
b)

$$N'(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/a} \cdot \ln \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t}{a}\right)' = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/a} \cdot \ln 2^{-1} \cdot \frac{1}{a} = N(t) \cdot \frac{-\ln 2}{a} = -\frac{\ln 2}{a} N(t)x$$

Vi ser at $N'(t) = -kN(t)$ med $\underline{\underline{k = \frac{\ln 2}{a}}}$.

Likninga $N'(t) = -kN(t)$ er et eksempel på en *differensiallikning*. Her er ikke den ukjente et tall vi skal bestemme, men en funksjon – i dette tilfellet $N(t)$.

c)



d) ^{14}C-mengden har blitt redusert til 19% – altså har vi at $N/N_0 = 19\% = 0,19$. Dette gir at

$$\begin{aligned}
N(t) &= 0,19N_0 \\
N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/a} &= 0,19N_0 \\
\left(\frac{1}{2}\right)^{t/a} &= 0,19 \\
\frac{t}{a}\ln\frac{1}{2} &= 0,19 \\
t &= a\,\frac{\ln 0,19}{\ln\frac{1}{2}} = 13657 \approx 13660
\end{aligned}$$

Det er $\underline{\underline{\text{13660 år}}}$ siden mammuten døde.