Innlevering i matematikk

Obligatorisk innlevering nr. 5
Innleveringsfrist: 18. februar 2011 kl. 14.00
Antall oppgåver: 5
Ein skal grunngi alle svar.

Oppgåve 1

$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$.

Skjæring med aksane
Nullpunkt:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{x^2+3}{x+1} &= 0 \\ x^2+3 &= 0 \qquad \text{(antar at } x \neq -1) \\ x^2 &= -3 \end{aligned}$$

Då x^2 aldri kan vere negativ, har ikkje likninga noko løysing, og $\underline{\underline{f \text{ har ingen nullpunkt}}}$.
Skjæring med y-aksen: $f(0) = \frac{0^2+3}{0+1} = \underline{\underline{3}}$.

Asymptotar
Nemnaren er 0 når $x = -1$. Teljaren er $(-1)^2 + 3 = 4 \neq 0$ når $x = -1$. Difor vil $f(x) \to \pm\infty$ når $x \to \pm\infty$. $\underline{\underline{x = -1}}$ er ein vetikal asymptote for f.
Polynomdivisjon:

$$\begin{array}{llll} (x^2 & & +3) : & (x+1) = x - 1 + \frac{4}{x+1} \\ -(x^2 & +x) & & \\ & -x & +3 & \\ & -(-x & -1) & \\ & & 4 & \end{array}$$

$f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1} \to x - 1 \quad \text{når} \quad x \to \pm\infty$.
$\underline{\underline{y = x - 1}}$ er ein skrå asymptote for f.

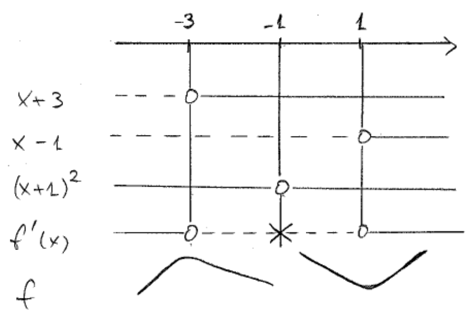
Monotinieigenskaper

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - (x^2+3) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}.$$

Vi faktoriserar teljaren:

$$\begin{aligned} x^2+2x-3 &= 0 \\ x &= \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{-2\pm 4}{2} = -1\pm 2 \\ x &= -1-2=-3 \quad \text{eller} \quad x=-1+2=1 \end{aligned}$$

$f'(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$
Forteiknskjema:

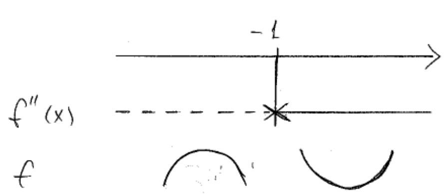


Av forteiknskjemaet ser vi at $\underline{\underline{f \text{ er veksande når } x<-3 \text{ og når } x>1}}$ og at $\underline{\underline{f \text{ er avtakande når } -3<x<-1 \text{ og når } -1<x<1}}$. f har eit toppunkt i $(-3, f(-3)) = \underline{\underline{(-3,-6)}}$ og eit botnpunkt i $(1, f(1)) = \underline{\underline{(1,2)}}$.

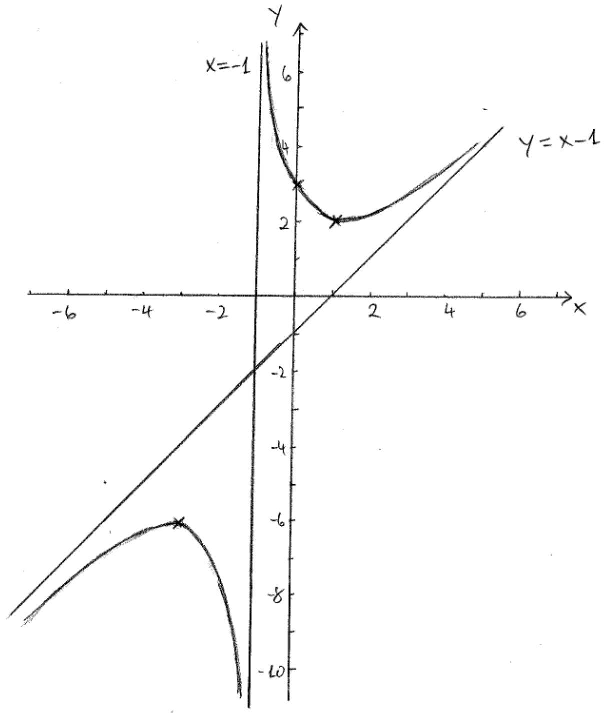
Konkavitet

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x-3)\cdot 2(x+1)\cdot 1}{((x+1)^2)^2} = \\ & \frac{2(x+1)((x+1)^2-(x^2+2x-3))}{(x+1)^4} = \frac{2(x^2+2x+1-x^2-2x+3)}{(x+1)^3} = \frac{8}{(x+1)^3}. \end{aligned}$$

Forteiknskjema:



Av forteiknskjemaet ser vi at $\underline{\underline{f \text{ har konkavitet ned når } x<-1 \text{ og konkavitet opp når } x>-1}}$.



Oppgåve 2

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = (u \cdot v^{-1})' = u' \cdot v^{-1} + u \cdot \left(v^{-1}\right)' = \frac{u'}{v} + u \cdot (-1)v^{-2} \cdot v' = \frac{u' \cdot v}{v \cdot v} - \frac{u \cdot v}{v^2} = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad \text{(q.e.d.).}$$

Oppgåva kan også løysast utan å bruke kjerneregelen. Vi kallar kvotienten u/v for $f(x)$;

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Vi kan då skrive at $u(x) = f(x) \cdot v(x)$. Vi brukar produktregelen for å derivere

$u(x)$:

$$\begin{aligned}
u' &= f' \cdot v + f \cdot v' = f' \cdot v + \frac{u}{v} \cdot v' \\
f' \cdot v &= u' - \frac{u \cdot v'}{v} = \frac{u' \cdot v}{v} - \frac{u \cdot v'}{v} = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v} \\
f' &= \frac{1}{v} \cdot \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v} = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \\
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad \text{(q.e.d.)}
\end{aligned}$$

Oppgåve 3

$$a'(x) = 4(3x^2-2)^3 \cdot (3x^2-2)' = 4(3x^2-2)^3 \cdot 6x = \underline{\underline{24x(3x^2-2)^3}}$$

$$b'(x) = -\sin(x^2+1) \cdot (x^2+1)' = -\sin(x^2+1) \cdot 2x = \underline{\underline{-2x\sin(x^2+1)}}$$

$$c'(x) = \frac{1\sqrt{x+1} - x\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} \cdot 1}{\sqrt{x+1}^2} = \frac{\sqrt{x+1} - \frac{x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} =$$

$$\frac{\left(\sqrt{x+1} - \frac{x}{2\sqrt{x+1}}\right) \cdot 2\sqrt{x+1}}{(x+1) \cdot 2\sqrt{x+1}} = \frac{2(x+1)-x}{2(x+1)^{3/2}} = \frac{x+2}{\underline{\underline{2(x+1)^{3/2}}}}$$

$$d'(x) = 10\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}x\right) \cdot \frac{2\pi}{5} \cdot (x+2) - \sin\left(\frac{2\pi}{5}x\right) \cdot 1}{(x+2)^2} = \underline{\underline{\frac{4\pi(x+2)\cos\left(\frac{2\pi}{5}x\right) - 10\sin\left(\frac{2\pi}{5}x\right)}{(x+2)^2}}}$$

Oppgåve 4

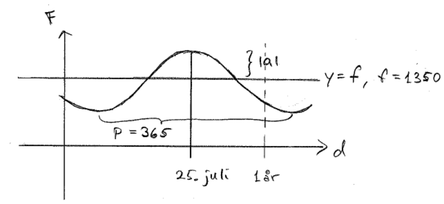
a) Då dette skal vere ein sinus-funksjon, kan han skrivast på forma

$$U(t) = a\sin(k(t-c)) + d.$$

Absoluttverdien av a gir amplituden, som er oppgitt å vere 310. Oppgåva seier ingenting om spenninga er aukande eller avtakande ved $t = 0$ – altså om grafen til U har ein topp eller botn rett til høgre for y-aksen. Difor kan a vere både -310 og 310. Vi vel den positive verdien for a. På eitt sekund har funksjonen svinga 50 gonger – altså er perioden $100/50 = 2,0$ målt i hundredels sekund. Dette gir at parameteren k blir $k = 2\pi/2,0 = \pi$. Då spenninga er negativ like ofte som ho er positiv, må vi ha at $d = 0$. Til sist står det att å bestemme faseforskyvninga c. Sidan $D(0) = 0$, får vi at $310\sin(\pi(0-c)) = 0$. Vi ser at dette er oppfylt for $c = 0$. Vi får funksjonen

$$\underline{\underline{D(t) = 310\sin(\pi t)}}.$$

b) Talet på folk i bygda, F, har denne forma: $F(d) = a\sin(k(d-c)) + f$. Vi veit at perioden skal vere eitt år – 365 dagar. Dette bestemmer k;



$k = 2\pi/365 \approx 0,01721$. Det gjennomsnittlege talet på folk bestemmer likevektslinja; $f = 1350$. Vidare veit vi at når talet er høgst, er det dobblet så høgt som når det er lågast. Om vi vel a til å vere positiv[1], får vi at den største verdien F kan ha vert $f + a$ og at den minste verdien F kan ha vert $F - a$. Sidan maksimalverdien skal vere dobbelt så stor som minimalverdien, må vi ha at

$$\begin{aligned} f + a &= 2(f - a) \\ 3a &= f \\ a &= \frac{f}{3} = \frac{1350}{3} = 450 \end{aligned}$$

Vi veit at folketalet er høgst den 25. juli. Dette kan vi bruke til å bestemme c. F er maksimal når $\sin(0,01721(d - c)) = 1$, som igjen gir at

$$0,01721(d - c) = \pi/2 + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Datoen 25. juli tilsvarar at $d = 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 25 = 206$. Altså, om vi vel $n = 0$, får vi

$$\begin{aligned} 0,01721 \cdot (206 - c) &= \frac{\pi}{2} \\ c - 206 &= -\frac{\pi}{2 \cdot 0,01721} = -91.25 \\ c &= -91,25 + 206 = 114,75. \end{aligned}$$

Vi får:

$$\underline{\underline{F(d) = 450 \sin(0,01721(d - 114,75)) + 1350.}}$$

c) Metode I
Vi veit at funksjonen $\sin x$ veks raskast når argumentet, x, er 0 – eller $n \cdot 2\pi$ der n er eit heiltal. Om vi vel $n = 0$, vår vi at F veks raskast når $0,01721(d - 114,75) = 0$, som igjen gir at $d = 114,75 \approx 115$. (Det er her grafen skjer likevektslinja fyrste gongen.) Dette tilsvarar datoen 25. april. (25=115-31-28-31.)

[1] Dette har vi alltid lov til, men verdien av c vert avhengig av om vi vel a positiv eller negativ.

Metode II

Farten F veks med, er gitt ved

$$F'(d) = 450\cos(0,01721(d-114,75))\cdot 0,01721+0 = 7,746\cos(0,01721(d-114,75)).$$

Vi veit at $\cos x$ er størst når argumentet x er 0 – eller $n \cdot 2\pi$. Med $0,01721(d-114,75) = 0$ (for $n = 0$) får vi, som før, at $d \approx 115$, som igjen tilsvarar datoen 25. april.

Metode III

Vi skal besteme d slik at $F'(d)$ blir maksimal. $F'(d)$ er maksimal for den verdien av d der $F''(d)$ endrar forteikn frå positiv til negativ.

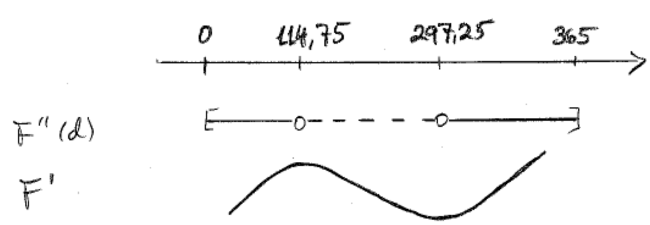
$$\begin{aligned} F''(d) &= (7,746\cos(0,01721(d-114,75)))' = -7,746\sin(0,01721(d-114,5))\cdot 0,01721 = \\ &\ -0,1333\sin(0,01721(d-114,75)). \end{aligned}$$

Vi finn nullpunkta til $F''(d)$:

$$\begin{aligned} F''(d) &= 0 \\ -0,1333\sin(0,01721(d-114,75)) &= 0 \\ 0,01721(d-114,75) &= n\cdot\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\ d-114,75 &= n\cdot\frac{\pi}{0,01721} = n\cdot 182,5 \\ d &= 114,75 + n\cdot 182,5. \end{aligned}$$

$F''(d) = 0$ når $d = 114,75$ og når $d = 114,75 + 182,5 = 297,25$. Vi set opp eit forteiknskjema for F''. Ved å sette inn verdiar i kvart av intervalla mellom 0, 114,75, 297,25 og 360 finn vi om F'' er positiv eller negativ i dei respektive intervalla.

$$\begin{aligned} F''(100) &= 0,0334 > 0 \\ F''(200) &= -0,132 < 0 \\ F''(350) &= 0,1048 > 0. \end{aligned}$$

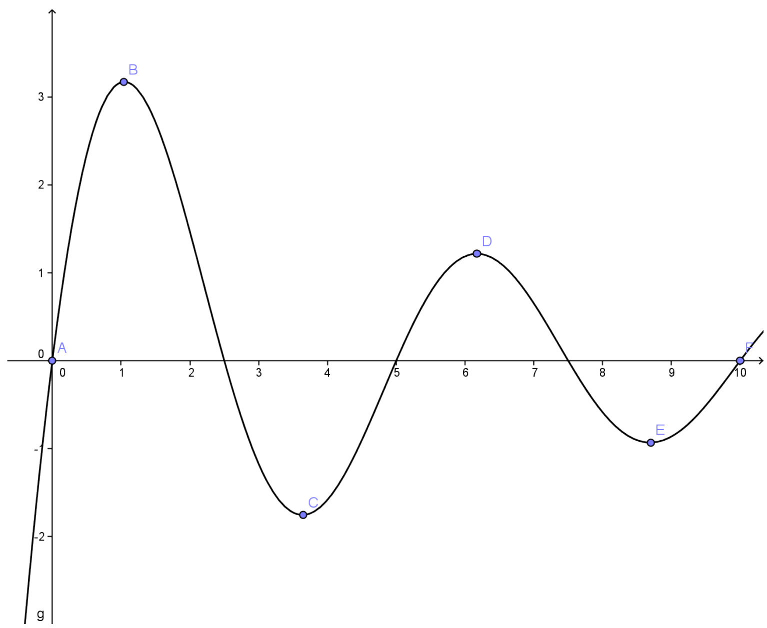


Av forteiknskjemaet ser vi at $F'(d)$ er maksimal når $d = 114,75 \approx 115$, som, som nemnd, tilsvarar datoen 25. april.

Oppgåve 5

$d(x) = 10\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}x\right)}{x+2}, \quad D_d = [0, 10]$

a) Frå GeoGebra får vi dette plottet:



b) Vi finn ved avlesing at vi har desse toppunkta: $\underline{\underline{(1,04\,,\ 3,18),\ (6,17\,,\ 1,22) \text{ og } (10\,,\ 0)}}$ og desse botnpunkta: $\underline{\underline{(0\,,\ 0),\ (3,65\,,\ -1,76) \text{ og } (8,70\,,\ -0,93)}}$.

c) Frå oppg. 3: $d'(x) = \frac{4\pi(x+2)\cos\left(\frac{2\pi}{5}x\right) - 10\sin\left(\frac{2\pi}{5}x\right)}{(x+2)^2}$

$$
\begin{aligned}
d'(1,04) &= \frac{4\pi \cdot (1,04+2) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 1,04\right) - 10 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 1,04\right)}{(1,04+2)^2} = 0,0336 \\
d'(3,65) &= \frac{4\pi \cdot (3,65+2) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 3,65\right) - 10 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 3,65\right)}{(3,65+2)^2} = 0,0320 \\
d'(6,17) &= 0,00531 \\
d'(8,70) &= 0,0134
\end{aligned}
$$

Vi ser at alle verdiane er nær null, men ingen av dei er nøyaktig lik null.

d)

$$
\begin{aligned}
&d'(x) = 0\\
&\frac{4\pi(x+2)\cos\left(\frac{2\pi}{5}x\right) - 10\sin\left(\frac{2\pi}{5}x\right)}{(x+2)^2} = 0\\
&4\pi(x+2)\cos\left(\frac{2\pi}{5}x\right) - 10\sin\left(\frac{2\pi}{5}x\right) = 0\\
&\sin\left(\frac{2\pi}{5}x\right) = \frac{4\pi(x+2)}{10}\cos\left(\frac{2\pi}{5}x\right)\\
&\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}x\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{5}x\right)} = \frac{2\pi}{5}(x+2)\\
&\tan\left(\frac{2\pi}{5}x\right) = \frac{2\pi}{5}(x+2)\\
&\frac{2\pi}{5}x = \tan^{-1}\left(\frac{2\pi}{5}(x+2)\right) + n\cdot\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}\\
&x = \frac{5}{2\pi}\left(\tan^{-1}\left(\frac{2\pi}{5}(x+2)\right) + n\cdot\pi\right)\\
&x = \frac{5}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2\pi}{5}(x+2)\right) + n\cdot\frac{5}{2} \qquad \text{(q.e.d.)}
\end{aligned}
$$

Sjølv om vi har "x" aleine på venstre side, har vi ikkje løyst likninga sidan også høgresida er avhengig av x. Men vi kan bruke uttrykket over til å finne ein meir nøyaktig verdi for x-verdien til det fyrste toppunktet ved *iterasjon*. For å gjere notasjonen enklare, kallar vi høgresida i likninga over med $n = 0$ for $g(x)$ slik at likninga vi skal løyse er

$$x = g(x) \quad \text{der} \quad g(x) = \frac{5}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2\pi}{5}(x+2)\right).$$

Vi kallar den verdien vi las av x_0; $x_0 = 1,04$. Vi set denne verdien inn i $g(x)$, og kallar denne verdien x_1. Så set vi x_1 inn i $g(x)$ og kallar denne verdien x_2. Om vi fortset slik, får vi:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1,04\\
x_1 &= g(x_0) = 1,046263057\\
x_2 &= g(x_1) = 1,046663923\\
x_3 &= g(x_2) = 1,046689527\\
x_4 &= g(x_3) = 1,046691163\\
x_5 &= g(x_4) = 1,046691267\\
x_6 &= g(x_5) = 1,046691274
\end{aligned}
$$

Vi ser at vi etter kvart har oppfyld likninga $x = g(x)$; x_5 og x_6 er så godt som like. Svaret vert så nøyaktig vi vil ut frå kor mange gonger vi *itererar*.

På kalkulatoren kan prosessen over gjerast effektivt på denne måten (Casio):
-Legg x_0-verdien inn i "X" på kalkulatoren (1.04 $\rightarrow$ X).
-Skriv $g(x)$ til "X" (5/2/π*$\tan^{-1}$(2*π/5*(X+2)) $\rightarrow$ X)
-Trykk på "EXE" så mange gonger som trengs for å få svaret så nøyaktig du vil.

Med den verdien for x vi fann over, x_6, vert $d'(x) = 2,28 \cdot 10^{-9}$, som jo er ganske nære 0.

x-verdiane for dei andre ekstremalpunkta kan finnast på same måte om vi set $n = 1$, $n = 2$ o.s.b. Vi bør legge til at ikkje alle likningar av typen $x = g(x)$ kan løysast numerisk på denne måten. Ofte vil det vere avgjerande at x_0 ligg rimeleg nære løysinga. (Sjekk gjerne om så er tilfelle her.) Måten vi formulerar likninga vi vil løyse med iterasjon, er også avgjerande for om metoden fungerarar (om $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *konvergerar* mot løysinga). Om vi til dømes hadde vald å sette opp likninga $d'(x) = 0$ som

$$x = \frac{5}{2\pi} \tan\left(\frac{2\pi}{5}x\right) - 2$$

(sjekk gjerne at denne likninga er ekvivalent med $d'(x) = 0$), hadde vi fått problem med å finne løysinga. (Sjekk gjerne dette også.)