Innlevering i matematikk

Obligatorisk innlevering nr. 5
Innleveringsfrist: 18. februar 2011 kl. 14.00
Antall oppgåver: 5
Ein skal grunngi alle svar.

Oppgåve 1

Gitt funksjonen $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$.
Finn ut så mykje som mogeleg om funksjonen utan å teikne grafen til funksjonen (med bakgrunn i det vi har gått gjennom i kapittel 8 og 9).
Bruk så denne informasjonen til å teikne/skissere grafen.

Oppgåve 2

Den deriverte av ein kvotient kan finnast ved å bruke denne rekneregelen:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}.$$

Bruk produktregelen og kjerneregelen til å vise at denne rekneregelen stemmer.

Oppgåve 3

Deriver desse funksjonane:

$$\begin{aligned}
a(x) &= (3x^2-2)^4 \\
b(x) &= \cos(x^2+1) \\
c(x) &= \frac{x}{\sqrt{x+1}} \\
d(x) &= 10\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}x\right)}{x+2}
\end{aligned}$$

Oppgåve 4

a) Spenninga i ein stikkontakt varierar som ein sinus-funksjon mellom 310 V og -310 V ("V" står for "Volt"). Frekvensen er 50 Hz – det vil seie at eitt sekund tilsvarar 50 periodar. Lat $U(t)$ vere spenninga målt i Volt som funskjon av tida t målt i hundredels sekund. Anta at $U(0) = 0$ og finn eit uttrykk for $U(t)$.

b) I ei sørlandsbygd er det dobbelt så mange folk på sommaren som på vinteren – år etter år. Det gjennomsnittlege talet på folk i bygda, fastbuande og gjester, er 1350. Typisk er talet høgast kring den 25. juli. Dersom vi går ut frå at dette talet varierar omtrent som ein sinus-funksjon, korleis kan vi finne ein funksjon som gir talet på folk i bygda? Lat argumentet til funksjonen vere dagnummeret d; $d = 1$ for 1. januar, $d = 32$ for 1. februar o.s.b.

c) Ut frå denne enkle modellen, når er tilstrøyminga til bygda størst?

Oppgåve 5

I denne oppgåva er berre a, b og c-delen obligatorisk.

Funksjonen $d(x) = 10^{\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}x\right)}{x+2}}$ (jmf. oppg. 3) med definisjonsmengda $D_d = [0, 10]$ er gitt.

a) Teikn grafen til d.

b) Finn alle ekstremalpunkta til d ved avlesing, og avgjer om dei er toppunkt eller botnpunkt.

c) For dei ekstremalpunkta som ikkje er randpunkt, undersøk om likninga $d'(x) = 0$ er oppfylt for dei x-verdiane som vart funne i oppg. b).

d) **Denne oppgåva er for spesielt interesserte – de får ikkje noko trekk om de ikkje gjer ho.**

Forklar kvifor likninga $d'(x) = 0$ er ekvivalent med at

$$x = \frac{5}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2\pi}{5}(x+2)\right) + n \cdot \frac{5}{2}$$

der $n \in \mathbb{Z}$ (d.v.s. n er eit heiltal). Vi kan finne meir nøyaktige verdiar for toppunkta ved *iterasjon*. Vi tar fatt i det fyrste toppunktet, som tilsvarar at $n = 0$ i likninga over, og gjer dette:
-Set inn den verdien x-verdien vi fann ved avlesing for det fyrste toppunktet på høgre side i likninga over (med $n = 0$). Det talet som kjem ut, er ein kandidat til ein meir nøyaktig verdi for x.
-Ta fatt i den nye verdien for x og set denne inn på høgresida i likninga.
-Gjenta prosessen til den "nye" x-verdien er nesten heilt lik den "gamle". Denne verdien er då ei rimeleg nøyaktig løysing av likninga $d'(x) = 0$. Kontroller gjerne dette.