Innlevering i matematikk

Obligatorisk innlevering nr. 4
Innleveringsfrist: 21. januar 2010 kl. 14.00
Antall oppgaver: 4

Løsningsforslag

Oppgave 1

$\vec{a} = [3, -1, 0]$, $\vec{b} = [2, 4, 7]$ og $\vec{c} = [-4, 1, 2]$.

a)

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} = \underline{\underline{\sqrt{10}}} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{2^2 + 4^2 + 7^2} = \underline{\underline{\sqrt{69}}} \\ |\vec{c}| &= \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 2^2} = \underline{\underline{\sqrt{21}}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= [3, -1, 0] \cdot [2, 4, 7] = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 7 = \underline{\underline{2}} \\ \vec{a} \cdot \vec{c} &= [3, -1, 0] \cdot [-4, 1, 2] = -3 \cdot 4 - 1 + 0 = \underline{\underline{-13}} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= [2, 4, 7] \cdot [-4, 1, 2] = -2 \cdot 4 + 4 + 2 \cdot 7 = \underline{\underline{10}} \end{aligned}$$

c) Vi kallar vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ for u. Definisjonen av skalarproduktet seier at

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos u.$$

Dette gir at

$$\cos u = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{69}} = \frac{2}{\sqrt{690}} \Rightarrow u = \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{690}} \approx \underline{\underline{85,6^\circ}}.$$

v er vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{c}$:

$$\cos v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{-13}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{21}} = -\frac{13}{\sqrt{210}} \Rightarrow u = \cos^{-1} \left(-\frac{13}{\sqrt{210}} \right) \approx \underline{\underline{153,8^\circ}}.$$

w er vinkelen mellom $\vec{b}$ og $\vec{c}$:

$$\cos w = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{10}{\sqrt{69} \cdot \sqrt{21}} = \frac{10}{3\sqrt{161}} \Rightarrow u = \cos^{-1} \frac{10}{3\sqrt{161}} \approx \underline{\underline{74,8^\circ}}.$$

d)

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 7\vec{e}_1 + 0\cdot 2\vec{e}_2 + 3\cdot 4\vec{e}_3 - 0\cdot 4\vec{e}_1 - 3\cdot 7\vec{e}_2 - (-1)\cdot 2\vec{e}_3 =$$
$$-7\vec{e}_1 - 21\vec{e}_2 + 14\vec{e}_3 = \underline{\underline{[-7,-21,14]}}.$$

$$\vec{a}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{e}_1 + \vec{0} + 3\vec{e}_3 - \vec{0} - 6\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 = \underline{\underline{[-2,-6,-1]}}.$$

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 4 & 7 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8\vec{e}_1 + 28\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 - 7\cdot 4\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 - (-16)\vec{e}_3 = \underline{\underline{[1,-32,18]}}.$$

e) Volumet V er gitt ved absoluttverdien av tre-vektor produktet;

$$V = \left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right| = |\,[-7,-21,14]\cdot[-4,1,2]\,| = |28-21+28| = \underline{\underline{35}}.$$

f) Vektorproduktet $\vec{a}\times\vec{b}$ mellom to vektorer, $\vec{a}$ og $\vec{b}$, er definert ved at produktet skal ha retning normalt på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$ etter en høgrehåndsregel, og lengda av $\vec{a}\times\vec{b}$ er gitt som $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin u$, der u er vinkelen mellom vektorene.

Dersom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ hadde vært vektorer i planet, ville det ikke vært mulig å finne noen vektor som står normalt på begge to for to generelle vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$; dersom de ikke er parallelle vil ikke en vektor som står normalt på $\vec{a}$, stå normalt på $\vec{b}$ – og vice versa.

Går vi derimot til høyere dimensjoner (selv om det er vanskelig å se for seg rom med 4 eller flere dimensjoner, er det ikke noe problem å regne med vektorer med 4 eller flere komponenter), er det annerledes. Da blir det nemlig slik at der er mange retninger som står normalt på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$. På den måten vil ikke definisjonen av vektorprodukt gi noen entydig vektor for vektorer med flere enn 3 komponenter.

Oppgave 2

a) Mengda av alle punkt med en bestemt avstand til et gitt punkt blir en $\underline{\underline{\text{sirkel}}}$. I dette tilfellet har sirkelen radius $r = 4$ og sentrum i $S(-1,3)$.

b) Nei, dette kan ikke være grafen til en funksjon siden den ikke er entydig; for noen x-verdier svarer det to y-verdier.

c) Vektoren $\overrightarrow{PS} = [x-(-1), y-3] = [x+1, y-3]$ skal ha lengde $r = 4$. Altså:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PS}| &= \sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} = 4 \\ & (x+1)^2+(y-3)^2 = 4^2. \end{aligned}$$

d) Vi forsøker å skrive likninga $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 20 = 0$ på samme form som likninga i oppgaven over. For å gjøre dette kan vi benytte oss av 1. og 2. kvadratseting.

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 - 4x + 10y + 20 = 0\\
&x^2 - 4x + y^2 + 10y + 20 = 0\\
&x^2 - 2\cdot 2x + y^2 + 2\cdot 5y + 20 = 0\\
&x^2 - 2\cdot 2x + 2^2 - 2^2 + y^2 + 2\cdot 5y + 5^2 - 5^2 + 20 = 0\\
&(x-2)^2 - 2^2 + (y+5)^2 - 5^2 + 20 = 0\\
&(x-2)^2 + (y+5)^2 - 9 = 0\\
&(x-2)^2 + (y-(-5))^2 = 3^2.
\end{aligned}$$

Av forma på likninga ser vi at dette tilsvarer en sirkel med sentrum i $\underline{\underline{(2,-5)}}$ og radius $\underline{\underline{3}}$.

Oppgave 3

Bestem disse grenseverdiene dersom de eksisterer:

a) $\lim_{x\to 5} \dfrac{2x^2 - 4x - 30}{x-5}$

Vi ser at både teller og nevner blir null for $x = 5$. Derfor må telleren vere delelig med $(x-5)$. Polynomdivisjon:

$$\begin{array}{rrrl}
(2x^2 & -4x & -30): & (x-5) = 2x+6\\
-(2x^2 & -10x) & & \\
 & 6x & -30 & \\
 & -(6x & -30) & \\
 & & 0 &
\end{array}$$

Vi får:

$$\lim_{x\to 5} \frac{2x^2-4x-30}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(2x+6)}{x-5} = \lim_{x\to 5}(2x+6) = 2\cdot 5+6 = \underline{\underline{16}}.$$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x+2}{\sin x}$

Vi veit at $\sin x \to 0$ når $x \to 0$. Vi ser også at telleren i uttrykket ikke går mot 0 når x går mot 0. Dermed får vi at

$$\frac{x+2}{\sin x} \to \pm\infty \text{ når } x \to 0.$$

<u>Grenseverdien ekstisterer ikke.</u>

c) $\lim_{x\to 1}(x^{50} + 1) = 1^{50} + 1 = \underline{\underline{2}}.$

d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^3-15x^2+24x-12}{x^3-7x^2+16x-12}$

Både teller og nevner går mot null når $x \to 2$:

$$\begin{aligned} 3\cdot 2^3 - 15\cdot 2^2 + 24\cdot 2 - 12 &= 0 \quad \text{for telleren og} \\ 2^3 - 7\cdot 2^2 + 16\cdot 2 - 12 &= 0 \quad \text{for nevneren.} \end{aligned}$$

Dermed er $x-2$ faktor i både teller og nevner. Vi faktoriserer ved hjelp av polynomdivisjon:

$$\begin{array}{rrrrl} (3x^3 & -15x^2 & +24x & -12): & (x-2) = 3x^2 - 9x + 6 \\ -(3x^3 & -6x^2) & & & \\ & -9x^2 & +24x & & \\ & -(-9x^2 & +18x) & & \\ & & 6x & -12 & \\ & & -(6x & -12) & \\ & & & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} (x^3 & -7x^2 & +16x & -12): & (x-2) = x^2 - 5x + 6 \\ -(x^3 & -2x^2) & & & \\ & -5x^2 & +16x & & \\ & -(-5x^2 & +10x) & & \\ & & 6x & -12 & \\ & & -(6x & -12) & \\ & & & 0 & \end{array}$$

Vi får:

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^3-15x^2+24x-12}{x^3-7x^2+16x-12} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(3x^2-9x+6)}{(x-2)(x^2-5x+6)} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-9x+6}{x^2-5x+6}$$

Også i dette uttrykket blir både teller og nevner null når vi setter inn $x = 2$. Dermed er også den nye telleren og den nye nevneren delelige med $(x-2)$. Vi utfører polynomdivisjon igjen:

$$\begin{array}{rrrl} (3x^2 & -9x & +6): & (x-2) = 3x - 3 \\ -(3x^2 & -6x) & & \\ & -3x & +6 & \\ & -(-3x & +6) & \\ & & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrl} (x^2 & -5x & +6): & (x-2) = x - 3 \\ -(x^2 & -2x) & & \\ & -3x & +6 & \\ & -(-3x & +6) & \\ & & 0 & \end{array}$$

Dermed blir grenseverdien

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-9x+6}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(3x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{3x-3}{x-3} = \frac{3\cdot 2 - 3}{2-3} = \underline{\underline{-3}}.$$

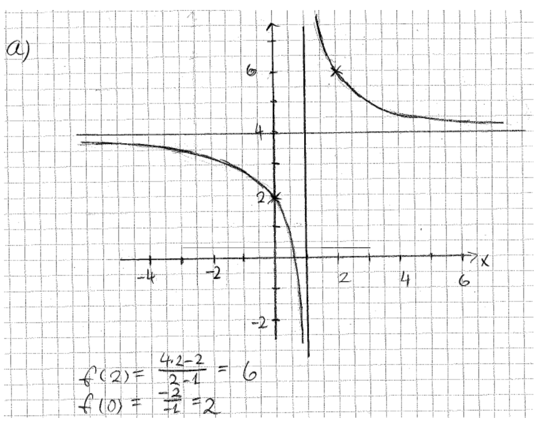
e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3x^3 - 15x^2 + 24x - 12}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = \dfrac{3\cdot 4^3 - 15\cdot 4^2 + 24\cdot 4 - 12}{4^3 - 7\cdot 4^2 + 16\cdot 4 - 12} = \underline{\underline{9}}.$

Oppgave 4

a) $a(x) = \frac{4x-2}{x-1}$
Nevneren er 0 når $x = 1$. Når $x = 1$, blir telleren $4\cdot 1 - 2 = 2$. Dermed har vi at $a(x) \to \pm\infty$ når $x \to 1$.
$\underline{\underline{x = 1}}$ er en vertikal asymptote for $a(x)$.
For $x \to \pm\infty$ får vi at

$$a(x) = \frac{4x-2}{x-1} = \frac{\frac{4x}{x} - \frac{2}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{4 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \to \frac{4-0}{1-0} = 4.$$

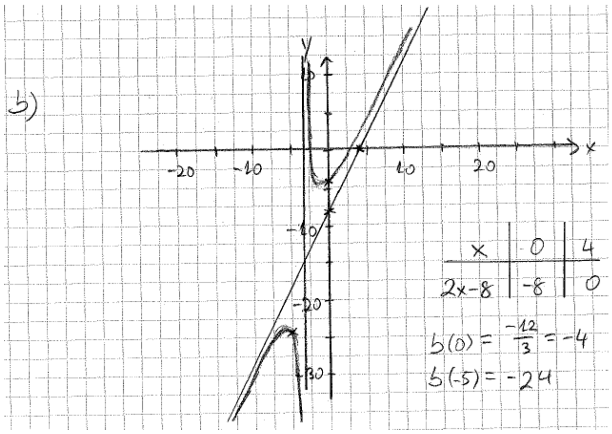
$\underline{\underline{y = 4}}$ er en horisontal asymptote for $a(x)$.



b) $b(x) = \frac{2x^2-2x-12}{x+3}$
Nevneren er 0 når $x = -3$.
Når $x = -3$, er telleren $2\cdot(-3)^2 - 2\cdot(-3) - 12 = 12$. Dermed får vi at $b(x) \to \pm\infty$ når $x \to -3$.
$\underline{\underline{x = -3}}$ er en vertikal asymptote for $a(x)$.
Siden polynomet i telleren har høgere grad enn polynomet i nevneren, vil ikke $b(x)$ ha noen horisontal asymptote. Derimot har den en skrå asymptote. Denne finner vi ved polynomdivisjon:

$$\begin{array}{rrrl}
(2x^2 & -2x & -12) & :(x+3) = 2x - 8 + \frac{12}{x+3} \\
-(2x^2 & +6x) & & \\
 & -8x & -12 & \\
 & -(-8x & -24) & \\
 & & 12 &
\end{array}$$

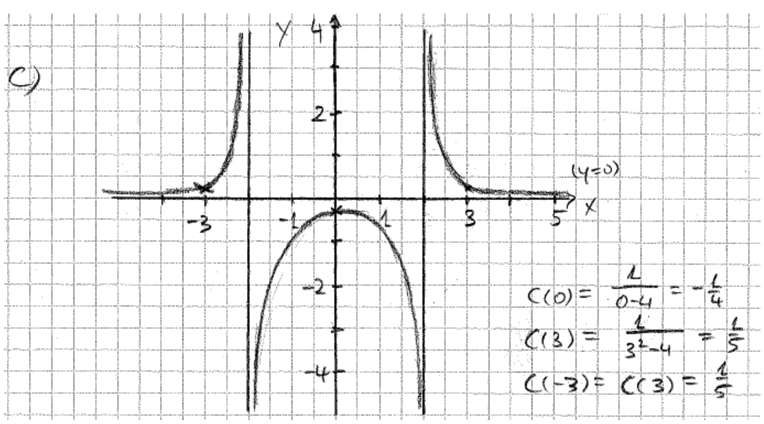
$\frac{12}{x+3} \to 0$ når $x \to \pm\infty$. Derfor er $\underline{\underline{y = 2x - 8}}$ en skrå asymptote for $b(x)$.



c) $c(x) = \frac{1}{x^2-4}$
Nevneren er 0 når $x = \pm 2$. Telleren er 1 (uavhengig av hva x er). Derfor er $\underline{\underline{x = -2}}$ og $\underline{\underline{x = 2}}$ vertikale asymptoter for $c(x)$.
Når $x \to \pm\infty$:

$$c(x) = \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} \to \frac{0}{1-0} = 0.$$

Dermed er $\underline{\underline{y = 0}}$ en horisontal asymptote for $c(x)$.



d) $d(x) = \frac{x^2-10x+25}{2x^2-6x-20}$
Vi finner nullpunktene til nevneren:

$$
\begin{aligned}
&2x^2 - 6x - 20 = 0 \\
&x^2 - 3x - 10 = 0 \\
&x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2} \\
&x = \frac{3-7}{2} = -2 \quad \vee \quad x = \frac{3+7}{2} = 5
\end{aligned}
$$

For $x = -2$ blir telleren $(-2)^2 - 10 \cdot (-2) + 25 = 49$. Dermed er $\underline{\underline{x = -2}}$ en horisontal asymptote for $d(x)$.
For $x = 5$ blir telleren $5^2 - 10 \cdot 5 + 25 = 0$. For å finne ut om $x = 5$ er en asymptote, ser vi på denne grenseverdien:

$$\lim_{x \to 5} d(x) = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)^2}{2(x+2)(x-5)} = \lim_{x \to 5} \frac{x-5}{2(x+2)} = \frac{5-5}{2 \cdot (5+2)} = 0.$$

Vi har her brukt 1. kvadratsetning og nullpunktene til nevneren for å faktorisere uttrykket. Siden $d(x)$ ikke går mot $\pm\infty$ når $x \to 5$, er ikke $x = 5$ noen asymptote.
Når $x \to \pm\infty$:

$$d(x) = \frac{x^2 - 10x + 25}{2x^2 - 6x - 20} = \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{10x}{x^2} + \frac{25}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{6x}{x^2} - \frac{20}{x^2}} = \frac{1 - \frac{10}{x} + \frac{25}{x^2}}{2 - \frac{6}{x} - \frac{20}{x^2}} \to \frac{1-0+0}{1-0-0} = \frac{1}{2}.$$

$\underline{\underline{y = 1/2}}$ er en horisontal asymptote for $d(x)$.