Innlevering i	FO929A - Matematikk
	Innlevering 1
Innleveringsfrist	22. oktober 2010
Antall oppgaver	11

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{7}+2)-\sqrt{12}+3 = \sqrt{3}\sqrt{7}+\sqrt{7}+2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}+3 = \underline{\underline{\sqrt{21}+\sqrt{7}+5}}$.

b) $2^{5/3}\cdot\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2^5}\cdot\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2^5\cdot 2\cdot 5^3} = \sqrt[3]{2^6\cdot 5^3} = 2^2\cdot 5 = \underline{\underline{20}}$.

c) $(\sqrt{99}-\sqrt{103})(\sqrt{99}+\sqrt{103}) = (\sqrt{99})^2-(\sqrt{103})^2 = 99-103 = \underline{\underline{-4}}$.

Oppgave 2

a) $2x+5=0$ gir $2x=-5$ og dermed $\underline{\underline{x=-\frac{5}{2}}}$.

b) $x-3(1-x)=5$ gir $x-3+3x=5$ etter oppløsning av parenteser. Dermed er $4x=8$, og $\underline{\underline{x=2}}$.

c) $\frac{x}{10}-(-\frac{6}{4}+\frac{1}{5})=\frac{3}{2}$ gir $2x-(-30+4)=30$ etter multiplikasjon med fellesnevner 20. Dermed er $2x=4$, og $\underline{\underline{x=2}}$.

d) $(1-x)-(2-\frac{3x}{5})+\frac{1}{3}=0$ gir $15-15x-(30-9x)+5=0$ etter multiplikasjon med fellesnevner 15. Dermed er $-6x-10=0$, som gir $-6x=10$, og $\underline{\underline{x=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}}}$.

e) $\frac{x}{2x+1}=-1$ gir $x=-(2x+1)=-2x-1$ etter multiplikasjon med $2x+1$. Dermed er $3x=-1$, og $\underline{\underline{x=-\frac{1}{3}}}$.

Oppgave 3

a) $x^2-11x+10=0$ gir $x=\frac{11\pm\sqrt{121-40}}{2}=\frac{11\pm 9}{2}$, og vi ser at $\underline{\underline{x=1}}$ eller $\underline{\underline{x=10}}$.

b) $(x-4)x=-25+6x$ gir $x^2-4x=-25+6x$, eller $x^2-10x+25=0$. Dermed er $x=\frac{10\pm\sqrt{100-100}}{2}=\frac{10}{2}=5$, er $\underline{\underline{x=5}}$ eneste løsning av likningen.

c) $(x-1)(x-2) = 2$ gir $x^2-3x+2 = 2$, eller $x^2-3x = x(x-3) = 0$. Dermed er $\underline{\underline{x = 0}}$ eller $\underline{\underline{x = 3}}$.

d) $x + \frac{1}{x} + 1 = 0$ gir $x^2 + 1 + x = 0$ etter multiplikasjon med nevneren x. Dermed er $x^2 + x + 1 = 0$. Siden $1^2 - 4 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$, har likningen $\underline{\underline{\text{ingen løsning}}}$.

e) $1 - \frac{1}{x} = \frac{6}{x^2}$ gir $x^2 - x = 6$, eller $x^2 - x - 6 = 0$. Dermed er $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$, og vi ser at $\underline{\underline{x = -2}}$ eller $\underline{\underline{x = 3}}$.

Oppgave 4

a) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ gir $x(x^2 - 3x + 2) = 0$, og dermed $x^2 - 3x + 2 = 0$ eller $x = 0$. Den første likningen har løsninger $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$. Vi får dermed løsningene $\underline{\underline{x = 0}}$, $\underline{\underline{x = 1}}$ og $\underline{\underline{x = 2}}$.

b) $x^5 - 13x^3 + 36x = 0$ gir $x(x^4 - 13x^2 + 36) = 0$, og dermed $x = 0$ eller $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. For å løse den siste likningen, setter vi $u = x^2$, som gir $u^2 - 13u + 36 = 0$. Dermed er $u = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$, og $u = 9$ eller $u = 4$. Vi ser dermed at $x^2 = 9$ eller $x^2 = 4$, det vil si $x = \pm 3$ eller $x = \pm 2$. Vi får dermed løsninger $\underline{\underline{x = 0, \pm 2, \pm 3}}$.

c) $x^7 = -128$ gir eksakt en løsning $x = \sqrt[7]{-128} = -2$ siden 7 er odde. Dermed er $\underline{\underline{x = -2}}$.

d) $x^4 = \frac{256}{81}$ gir to løsninger $x = \pm \sqrt[4]{\frac{256}{81}} = \pm \frac{\sqrt[4]{256}}{\sqrt[4]{81}} = \pm \frac{4}{3}$ siden $\frac{256}{81} > 0$ og 4 er jevn. Dermed er $\underline{\underline{x = \frac{4}{3}}}$ eller $\underline{\underline{x = -\frac{4}{3}}}$.

Oppgave 5

a) $\sqrt{5-x} = x + 1$ gir $5 - x = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ etter kvadrering, eller $x^2 + 3x - 4 = 0$. Dette gir $x = 1$ eller $x = -4$. Vi setter $x = 1$ og $x = -4$ inn i opprinnelig likning $\sqrt{5-x} = x + 1$, og ser at $x = 1$ gir løsning, mens $x = -4$ ikke gir løsning. Dermed er $\underline{\underline{x = 1}}$.

b) $\sqrt{4-x} = 2 - \sqrt{x}$ gir $4 - x = (2 - \sqrt{x})^2 = 4 - 4\sqrt{x} + x$ etter kvadrering, og dermed $-2x = -4\sqrt{x}$. Kvadrering av denne likningen gir $4x^2 = 16x$, eller $4x^2 - 16x = 4x(x-4) = 0$, og dermed $x = 0$ eller $x = 4$. Vi setter $x = 0$ og $x = 4$ inn i opprinnelig likning $\sqrt{4-x} = 2 - \sqrt{x}$, og ser at $x = 0$ og $x = 4$ begge gir løsning. Dermed er $\underline{\underline{x = 0}}$ eller $\underline{\underline{x = 4}}$.

c) $\sqrt{3x} = \sqrt[3]{x}$ gir $(\sqrt{3x})^6 = (\sqrt[3]{x})^6$ (ved å opphøye begge sider av likningen i $6 = 2 \cdot 3$), eller $(3x)^3 = x^2$. Dermed er $(3x)^3 - x^2 = 27x^3 - x^2 = x^2(27x - 1) = 0$, så $x = 0$ eller $x = \frac{1}{27}$. Vi setter $x = 0$ og $x = \frac{1}{27}$ inn i opprinnelig likning $\sqrt{3x} = \sqrt[3]{x}$, og ser at $x = 0$ og $x = \frac{1}{27}$ begge er løsninger. Dermed er $\underline{\underline{x = 0}}$ eller $\underline{\underline{x = \frac{1}{27}}}$.

Oppgave 6

a) Vi løser den andre likningen for y, og får $-2y = 2 - 4x$, og dermed $y = 2x - 1$. Deretter setter vi $y = 2x - 1$ inn i den første likningen, og får at $10x + 5(2x - 1) = 25$, eller $20x - 5 = 25$. Dette gir $x = \frac{3}{2}$, og dermed at $y = 2x - 1 = 2$. Vi ser at $\underline{\underline{x = \frac{3}{2},\ y = 2}}$.

b) Vi løser tredje likning for z, og får $z = y+2$. Deretter setter vi inn $z = y+2$ i de to første likningene, og får at $x + 2y = 5$ fra den første likningen, og at $2x + 2y = 6$ fra den andre likningen. Vi løser $x + 2y = 5$ for x, og får at $x = 5-2y$, og setter dette inn i $2x+2y = 6$. Da får vi at $2(5-2y)+2y = 6$, eller $10 - 2y = 6$. Dette gir at $y = 2$, $x = 5 - 2y = 1$, og $z = y + 2 = 4$. Vi ser at $\underline{\underline{x = 1,\ y = 2,\ z = 4}}$.

Oppgave 7

a) Vi utfører polynomdivsjonen $x^2 : (x - 1)$, som gir følgende resultat:

$$\begin{array}{rlll l}
 & x^2 & & & : (x-1) = x+1 \\
- & (x^2 & -x &) & \\
= & & (x &) & \\
- & & (x & -1) & \\
= & & & (1) &
\end{array}$$

Vi ser at vi får kvotient $\underline{\underline{x + 1}}$ og rest $\underline{\underline{1}}$.

b) Vi utfører polynomdivsjonen $(x^3 - 4x + 1) : (x^2 - 2x + 1)$, som gir følgende resultat:

$$\begin{array}{rllll l}
 & (x^3 & 2x^2 & & +1) & : (x^2-1) = x+2 \\
- & (x^3 & & -x &) & \\
= & & (2x^2 & +x & +1) & \\
- & & (2x^2 & & -2) & \\
= & & & (+x & +3) &
\end{array}$$

Vi ser at vi får kvotient $\underline{\underline{x + 2}}$ og rest $\underline{\underline{x + 3}}$.

c) Vi utfører polynomdivsjonen $(x^4 + 1) : (x^2 - x)$, som gir følgende resultat:

$$\begin{array}{rlllll l}
 & (x^4 & & & & +1) & : (x^2-x) = x^2+x+1 \\
- & (x^4 & -x^3 & & &) & \\
= & & (x^3 & & & +1) & \\
- & & (x^3 & -x^2 & &) & \\
= & & & (x^2 & & +1) & \\
- & & & (x^2 & -x &) & \\
= & & & & (x & +1) &
\end{array}$$

Vi ser at vi får kvotient $\underline{\underline{x^2+x+1}}$ og rest $\underline{\underline{x+1}}$.

Oppgave 8

a) Vi har at $x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$. Siden alle faktorene er førstegradsuttrykk, blir faktoriseringen $\underline{\underline{x^3-2x^2+x = x(x-1)^2}}$.

b) Likningen $x^2-6x+\frac{35}{4} = 0$ gir $x = \frac{6\pm\sqrt{36-35}}{2} = \frac{6\pm1}{2}$, og dermed $x = \frac{5}{2}$ eller $x = \frac{7}{2}$. Siden $x^2-6x+\frac{35}{4}$ har ledende term x^2, blir faktoriseringen $\underline{\underline{x^2-6x+\frac{35}{4} = (x-\frac{5}{2})(x-\frac{7}{2})}}$.

c) Likningen $x^2-\frac{5}{2}x+2 = 0$ har ikke noen løsninger, og $x^2-\frac{5}{2}x+2$ kan derfor ikke faktoriseres i førstegradsfaktorer. Faktoriseringen blir dermed $\underline{\underline{x^2-\frac{5}{2}x+2}}$.

d) Likningen $x^3+8 = 0$ har en løsning $x = \sqrt[3]{-8} = -2$. Dermed vet vi at $(x+2)$ deler x^3+8. For å finne kvotienten, utfører vi polynomdivisjonen $x^3+8 : x+2$. Vi får at $(x^3+8) : (x+2) = x^2-2x+4$, og dermed er $x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4)$. For å sjekke om den siste faktoren kan faktoriseres i førstegradsfaktorer, løser vi likningen $x^2-2x+4 = 0$, og ser at en ikke har noen løsninger. Faktoriseringen blir dermed $\underline{\underline{x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4)}}$.

e) Vi forsøker å finne en løsning av likningen $x^3-6x^2+11x-6 = 0$. Mulige heltallige løsninger er $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$, og vi ser at $x = 1$ er en løsning ved innsetting. Polynomdivisjon gir $(x^3-6x^2+11x-6) : (x-1) = x^2-5x+6$, og videre er løsningene av $x^2-5x+6 = 0$ gitt ved $x = 2$ eller $x = 3$. Dermed blir $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$, og faktoriseringen blir $\underline{\underline{x^3-6x^2+11x-6 = (x-1)(x-2)(x-3)}}$.

Oppgave 9

a) Vi bruker faktoriseringen $x^3-2x^2+x = x(x-1)^2$, og finner følgende fortegnsskjema:

		0		1	
x	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+
$x-1$	-	-	-	0	+
x^3-2x^2+x	-	0	+	0	+

b) Vi bruker faktoriseringen $x^2-6x+\frac{35}{4} = (x-\frac{5}{2})(x-\frac{7}{2})$, og finner følgende fortegnsskjema:

		$5/2$		$7/2$	
$x-5/2$	-	0	+	+	+
$x-7/2$	-	-	-	0	+
$x^2-6x+35/4$	+	0	-	0	+

c) Vi bruker at $x^2 = x \cdot x$, og finner følgende fortegnsskjema:

		0	
x	-	0	+
x	-	0	+
x^2	+	0	+

d) Vi bruker faktoriseringen $x^3-6x^2+11x-6 = (x-1)(x^2-5x+6) = (x-1)(x-2)(x-3)$ og finner følgende fortegnsskjema:

		1		2		3	
$x-1$	-	0	+	+	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	-	0	+
$x^3-6x^2+11x-6$	-	0	+	0	-	0	+

e) Vi bruker faktoriseringen $\frac{x^3-2x^2+x}{x^2-5x+6} = \frac{x(x-1)^2}{(x-2)(x-3)}$, og finner følgende fortegnsskjema:

		0		1		2		3	
x	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{x^3-2x^2+x}{x^2-5x+6}$	-	0	+	0	+	X	-	X	+

Oppgave 10

a) $-2x \geq 3$ gir $x \leq \frac{3}{-2}$ og dermed $\underline{\underline{x \leq -\frac{3}{2}}}$.

b) $x+2 < 12-x$ gir $2x < 10$ og dermed $\underline{\underline{x < 5}}$.

c) $\frac{1}{x} \geq 2$ gir $1 \geq 2x$ når $x > 0$, og dermed $x \leq \frac{1}{2}$. Dette gir positive løsninger $0 < x \leq \frac{1}{2}$. Når $x < 0$, gir $\frac{1}{x} \geq 2$ at $1 \leq 2x$, og dermed $x \geq \frac{1}{2}$. Dette gir ingen negative løsninger. Dermed blir løsningene av ulikheten $\underline{\underline{0 < x \leq \frac{1}{2}}}$.

Oppgave 11

a) Ulikheten $x^2 - 3x < -2$ gir $x^2 - 3x + 2 < 0$, og fra fortegnsskjemaet for $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ ser vi at $x^2 - 3x + 2 < 0$ når $\underline{\underline{1 < x < 2}}$, det vil si når $\underline{\underline{x \in (1,2)}}$.

b) Ulikheten $x^3 + 8 \geq -19$ gir $x^3 + 27 \geq 0$, og fra fortegnsskjemaet for $x^3 + 27 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$ ser vi at $x^3 + 27 \geq 0$ når $\underline{\underline{x \geq -3}}$, det vil si når $\underline{\underline{x \in [-3, \infty)}}$.

c) Ulikheten $\frac{2}{x^2} > -\frac{1}{x} + 1$ gir $\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - 1 > 0$, det vil si $\frac{2+x-x^2}{x^2} > 0$. Siden $x^2 > 0$ når $x \neq 0$, gir dette $2 + x - x^2 > 0$, eller $x^2 - x - 2 < 0$. Fra fortegnsskjemaet for $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ ser vi at $x^2 - x - 2 < 0$ når $-1 < x < 2$ og $x \neq 0$, det vil si når $\underline{\underline{x \in (-1,0) \cup (0,2)}}$.