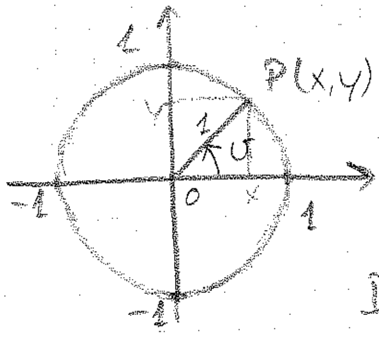
# Førelesing 19/10

## Einings-sirkelen




$\cos v = x$

$\sin v = y$

$\boxed{?}$ $\tan v$ når $v \notin [0°, 90°\rangle$ ?

Def. $\tan v$ som

$\tan v = \dfrac{\sin v}{\cos v}$ $\quad (\cos v \neq 0)$

$\boxed{?}$

$\boxed{?}$ Diskuter, sjå:

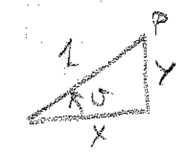
$\cos(v + n\cdot 360°) = \cos v$

$\sin(v + n\cdot 360°) = \sin v$

$(\tan(v + n\cdot 360°) = \tan v)$

$n \in \mathbb{Z}$

Trekant:




Pytagoras: $x^2 + y^2 = 1^2$

$(\cos v)^2 + (\sin v)^2 = 1$

$\cos^2 v + \sin^2 v = 1$

$\boxed{?}$ Dersom $\sin v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, kva er $v$?

Har funne før: $v = \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 60° \; (= \frac{\pi}{3})$

Einaste løysing?

Nei, $60° + 360° = 420°$

$60° + 2\cdot 360° = 780°$

$\vdots$

Generelt $v = 60° + n\cdot 360°$, $n \in \mathbb{Z}$ er

også løysing.

Fleire?

Ser også $180° - 60° = 120°$ gir ei løysing. Også her får vi nye løysingar ved å legge til eller trekke frå 360° fleire gonger.

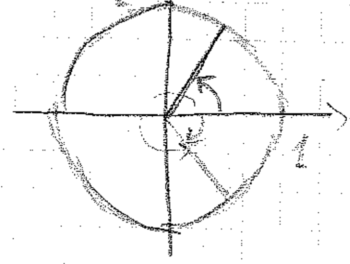
Løysing: $v = 60° + n \cdot 360°$ eller
$\underline{v = 120° + n \cdot 360°}, \quad n \in \mathbb{Z}$

Nytt eksempel

Løys likninga $5\cos v - 2 = 0$ når $v \in [0°, 360°\rangle$

$5\cos v - 2 = 0$

$\cos v = \frac{2}{5}$



$\cos^{-1} \frac{2}{5} = 66{,}4°$

Også løysing: $-66{,}4°$

Ligg ikkje i fyrste omløp*. Men det gjer vinkelen vi får om vi legg til 360°. Vi får då løysinga $-66{,}4° + 360° = 293{,}6°$

Løysing: $\underline{v = 66{,}4° \text{ eller } v = 293{,}6°}$

* Fyrste omløp: Vinkelen ligg i intervallet $[0°, 360°\rangle$.

Kva med tangens?

Dersom $v_0$ er ei løysing av ei likning på forma $\tan v = h^\circ$, er også $v_0 + n \cdot 180^\circ$, $n \in \mathbb{Z}$, ei løysing.

- Viser dette seinare

Eksempel

Løys $2\sin v - 3\cos v = 0$ når $v$ ligg i fyrste omløp.

$\boxed{?}$ Korleis kan dette bli ei „tangens-likning"?

- Deler på $\cos v$. $\boxed{?}$ Kva må vi anta?

Antar $\cos v \neq 0$

$$\frac{2\sin v - 3\cos v}{\cos v} = \frac{0}{\cos v}$$

$$2\frac{\sin v}{\cos v} - 3\frac{\cos v}{\cos v} = 0$$

$$2\tan v - 3 = 0$$

$$2\tan v = 3$$

$$\tan v = \frac{3}{2}$$

$$\tan^{-1}\frac{3}{2} = 56{,}3^\circ$$

Generell løysing: $v = 56{,}3^\circ + n \cdot 180^\circ$, $n \in \mathbb{Z}$

Om vi vel $n = 1$, ligg framleis $v$ i fyrste omløp.

Også løysing: $v = 56{,}3° + 180° = 236{,}3°$

Løysing: $v = 56{,}3°$ eller $v = 236{,}3°$

$\boxed{?}$ Gløymt noko?

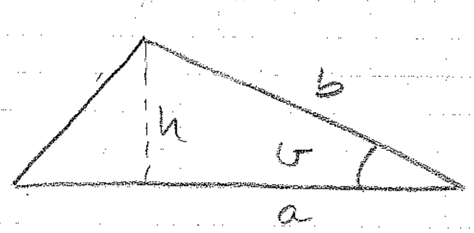
Ja, må sjekke at $\cos v \neq 0$

$\cos 56{,}3° = 0{,}555 \neq 0$
$\cos 236{,}3° = -0{,}555 \neq 0$

Løysingane er ok.

Arealsetninga og sinus-setninga
(7.4 og 7.5)

Gitt trekant (ikkje rettvinkla):




$\boxed{?}$ Areal?

$A = \frac{1}{2} a \cdot h$
$\sin v = \frac{h}{b}$
$h = b \cdot \sin v$

$A = \frac{1}{2} a \cdot (b \cdot \sin v) = \frac{1}{2} ab \sin v$

Altså: I ein trekant der vi kjenner lengdene a og b av to sider og vinkelen $v$ mellom dei er arealet gitt ved

$$A = \frac{1}{2} ab \sin v$$

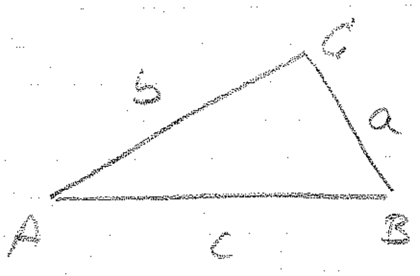
[?] Dersom $v = 90°$, kva blir formelen?

$$A = \frac{1}{2} ab$$

[?] Kva har vi antatt om $v$ over?

- $v \in [0°, 90°\rangle$
- Formelen stemmer også for $v \in [90°, 180°]$ (vist i boka)

Sinus-setninga




- Gir namn på sidene etter kva vinkel dei står mot.

Areal: $A = \frac{1}{2} bc \sin A$

Også: $A = \frac{1}{2} ac \sin B$

Og: $A = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$

Altså: $\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$

- Gongar med 2:

$$bc \sin A = ac \sin B = ab \sin C$$

- Deler på $abc$:

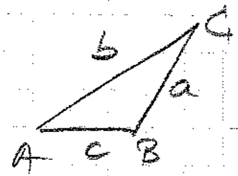
$$\frac{bc \sin A}{abc} = \frac{ac \sin B}{abc} = \frac{ab \sin C}{abc}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Sinussetninga:

For ein trekant ABC gjeld

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

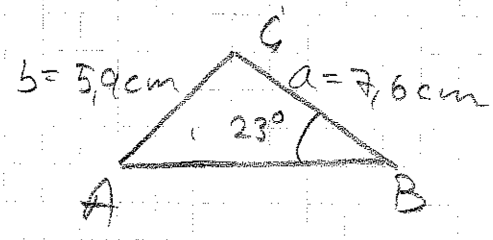



Eksempel

I $\triangle ABC$ er $AC = 5{,}9$ cm og $BC = 7{,}6$cm og $\angle B = 23°$.

Finn alle sider og vinklar

$\boxed{?}$ Kva er det fyrste vi gjer?
– Teikne figur (stor!)



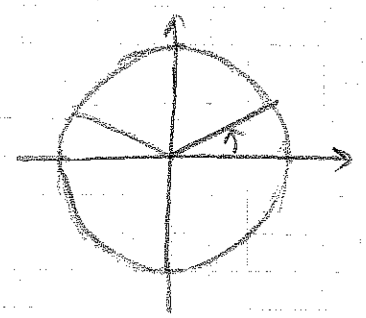

Sinus-setninga

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\sin A = a \cdot \frac{\sin B}{b} = 7{,}6\text{cm} \cdot \frac{\sin 23°}{5{,}9\text{cm}} = 0{,}5033$$

$$\sin^{-1} A = 30{,}22°$$

$\boxed{?}$ Einaste løysing?
– Nei

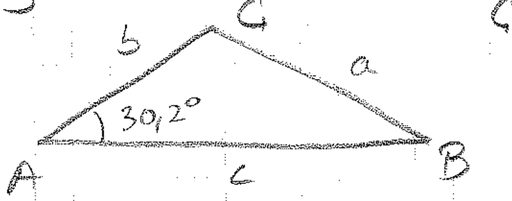


Også løysing? $180° - 30{,}22° = 149{,}78°$

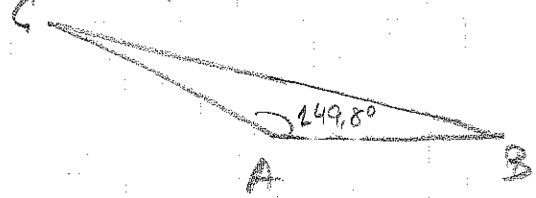
$\boxed{?}$ Fleire? Nei, må vere mellom $0°$ og $180°$.

Altså: $\angle A = 30{,}2^\circ$ eller $\angle A = 149{,}8^\circ$

Løysing 1:




Løysing 2:




For løysing 1, $\angle A = 30{,}2°$

$$\angle C = 180° - \angle B - \angle A = 180° - 23° - 30{,}2° = \underline{\underline{126{,}8°}}$$

Sinus-setninga:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$$ – lov å „flippe" – så lenge vi gjer det på begge sider

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

$$c = \sin C \cdot \frac{b}{\sin B} = \sin 126{,}8° \cdot \frac{5{,}9\,\text{cm}}{\sin 23°} = \underline{\underline{12{,}1\,\text{cm}}}$$

For løysing 2, $\angle A = 149{,}8°$:

$$\angle C = 180° - \angle B - \angle A = 180° - 23° - 149{,}8° = \underline{\underline{7{,}2°}}$$

Sinus-setninga:

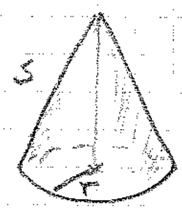
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

$$c = \sin C \cdot \frac{b}{\sin B} = \sin 7{,}2° \cdot \frac{5{,}9\,\text{cm}}{\sin 23°} = \underline{\underline{1{,}89\,\text{cm}}}$$

Hvis tid:

Tilbakeblikk, overflata av ein sylinder:

$$A = \pi r^2 + \pi r s$$





[?] Bevis?

God oppgåve: 7.52