Løysingsforslag til undervegs-eksamen, desember 2007.

Oppg. 1

a) $x^2+x-1=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\underline{\underline{x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{eller} \quad x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}}$$

b) $3x+7y=32 \qquad (\mathrm{I})$

$4x+11y=46 \qquad (\mathrm{II})$

II: $4x=46-11y$

$$x=\frac{46}{4}-\frac{11}{4}y=\frac{23}{2}-\frac{11}{4}y$$

II i I:

$$3\left(\frac{23}{2}-\frac{11}{4}y\right)+7y=32$$

$$\frac{69}{2}-\frac{33}{4}y+7y=32$$

$$7y-\frac{33}{4}y=32-\frac{69}{2}$$

$$\frac{28-33}{4}y=\frac{64-69}{2}$$

$$-\frac{5}{4}y=-\frac{5}{2}$$

$$y=\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=2$$

II: $x = \frac{23}{2} - \frac{11}{4} \cdot 2 = \frac{46-22}{4} = \frac{24}{4} = 6$

Løysing: $\underline{\underline{x = 6 \text{ og } y = 2}}$

c) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

$(x^3)^2 + 7x^3 - 8 = 0$

$x^3 = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-7 \pm 9}{2}$

$x^3 = \frac{-7+9}{2} = 1$ eller $x^3 = \frac{-7-9}{2} = -8$

$\underline{x^3 = 1}$: $x^3 = 1$

$x = \sqrt[3]{1} = 1$

$\underline{x^3 = -8}$: $x^3 = -8$

$x = \sqrt[3]{-8} = -2$

Løysing: $\underline{\underline{x = 1 \text{ eller } x = -2}}$

d) $\sqrt{4+x} = 5 - \sqrt{x-1}$

$\Downarrow$

$4 + x = (5 - \sqrt{x-1})^2 = 25 + (x-1) - 2 \cdot 5\sqrt{x-1}$

$4 + x = 24 + x - 10\sqrt{x-1}$

$10\sqrt{x-1} = 24 + x - 4 - x = 20$

$\sqrt{x-1} = 2$

$\Downarrow$

$y - 1 = 2^2 = 4$

$x = 4 + 1 = 5$

Prøve på $x=3$:

Venstre side: $\sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$

Høgre side: $5 - \sqrt{5-1} = 5 - \sqrt{4} = 3$

Høgre side og venstre side er like; løysinga er ok.

Løysing: $\underline{\underline{x = 5}}$

e)

$$x^2 - 3x + 3 < 1$$

$$x^2 - 3x + 3 - 1 < 0$$

$$x^2 - 3x + 2 < 0$$

Faktoriserer uttrykket $x^2 - 3x + 2$

Finn nullpunkta:

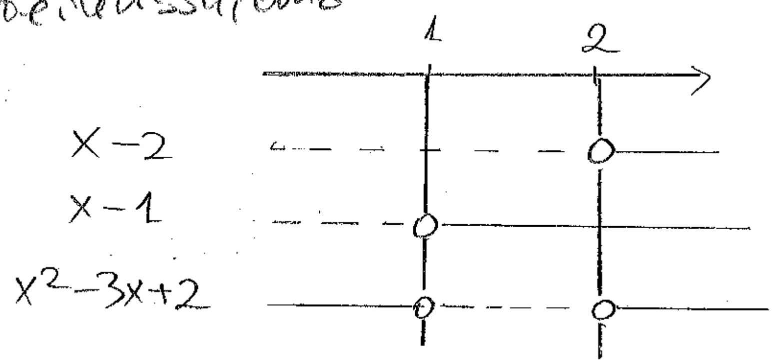
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{3+1}{2} = 2 \quad \text{eller} \quad x = \frac{3-1}{2} = 1$$

Faktorisering: $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$

Forteiknsskjema:



Av forteiknsskjemaet ser vi at $x^2 - 3x + 2 < 0$ når $\underline{\underline{1 < x < 2}}$

f) $x^3 - 2x + 1 = 0$

Ser: Likninga er oppfyld for $x = 1$:

$1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$

Difor er $x - 1$ faktor i polynomet på venstre side.

Polynomdivisjon:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 2x + 1) : (x - 1) = x^2 + x - 1 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad +x^2 - 2x \\
\quad \underline{-(x^2 - x)} \\
\qquad -x + 1 \\
\qquad \underline{-(-x + 1)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Faktoriserar $x^2 + x - 1$ vidare ved å finne nullpunkta:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \text{eller} \quad x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Altså:

$$(x - 1)\left(x - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)\left(x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

$$\underline{\underline{x = 1 \quad \text{eller} \quad x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \text{eller} \quad x = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}}$$

Oppg. 2

a) $\vec{AB} = [2-(-2), 2-(-1), 1-1] = \underline{\underline{[4, 3, 0]}}$

$\vec{AC} = [2-(-2), 2-(-1), 3-1] = \underline{\underline{[4, 3, 2]}}$

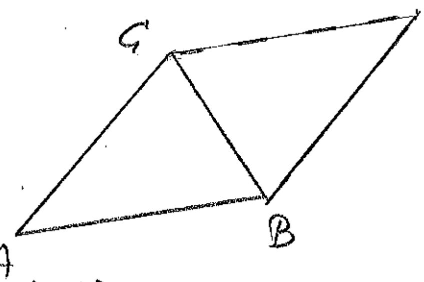
$\vec{BC} = [2-2, 2-2, 3-1] = \underline{\underline{[0, 0, 2]}}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2+3^2+0^2} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$

$|\vec{AC}| = \sqrt{4^2+3^2+2^2} = \underline{\underline{\sqrt{29}}}$

$|\vec{BC}| = \underline{\underline{2}}$

b) Vi veit at lengda av vektoren $\vec{AB} \times \vec{AC}$ er lik arealet av parallellogrammet bestemt av desse tre punkta. Arealet av trekanten ABC blir halvparten av dette (sjå figur).



$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right. =$$

$\vec{e}_1 \cdot 3 \cdot 2 + \vec{0} + \vec{e}_3 \cdot 4 \cdot 3 - \vec{e}_3 \cdot 4 \cdot 3 - \vec{0} - \vec{e}_2 \cdot 4 \cdot 2 =$

$6\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2 = [6, -8, 0]$

Areal: $\frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2+(-8)^2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = \underline{\underline{5}}$

c) $\angle ABC$ er det same som vinkelen mellom $\overrightarrow{BA}$ og $\overrightarrow{BC}$.

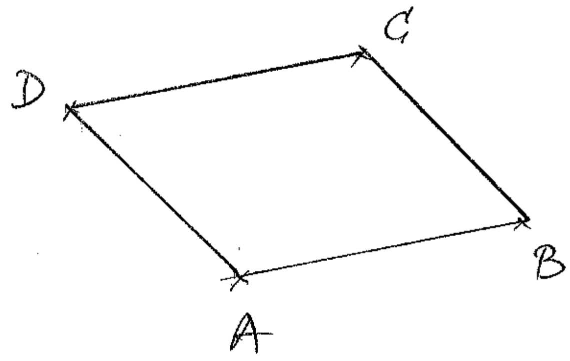
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC} = -[4,3,0] \cdot [0,0,2] =$

$4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 0$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \iff \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ (begge vektorane er ulik $\vec{0}$)

Altså: $\angle ABC = \underline{\underline{90^\circ}}$

d) Tolkar oppgåva slik at AB og BC er sider i parallellogrammet.



Ser: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = [-2,-1,1] + [0,0,2] = [-2,-1,3]$

D har koordinatane $\underline{\underline{(-2,-1,3)}}$.

e) $\overrightarrow{BD} = [-2-2, -1-2, 3-1] = [-4,-3,2]$

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = [-4,-3,2] \cdot [4,3,2] = -4 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 + 2 \cdot 2 = -21 \neq 0$

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} \neq 0 \Rightarrow$ <u>$\overrightarrow{BD}$ står ikkje vinkelrett på $\overrightarrow{AD}$.</u>

f) Parallellepipedet spent ut av vektorane $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ og $\vec{AT}$ har volumet

$$V_1 = |(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AT}|$$

Også: $V_1 = Gh$, der G er arealet av parallellogrammet $ABCD$ og h er høgda (avstanden frå T til parallellogramet).

Pyramiden har volumet $V_2 = \frac{1}{3} G h = \frac{1}{3} V_1$

Vi finn fyrst V_1. Tre-vektor-produktet $(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AT}$ kan reknast ut som ein determinant.

$$\vec{AD} = \vec{BC} = [0, 0, 2]$$

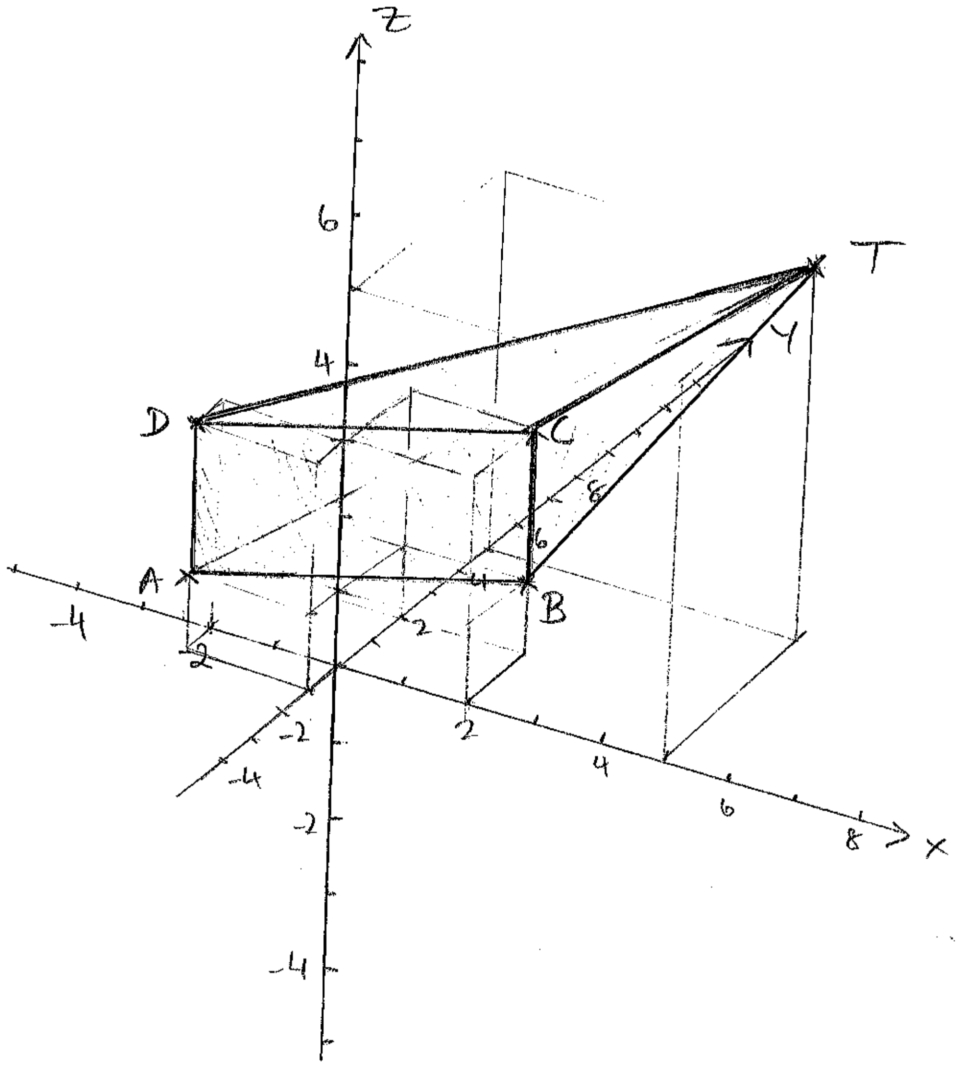
$$\vec{AT} = [5-(-2), 5-(-1), 5-1] = [7, 6, 4]$$

$$(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AT} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \\ 7 & 6 \end{matrix} =$$

$$4 \cdot 0 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 7 + 0 \cdot 0 \cdot 6 - 0 \cdot 0 \cdot 7 - 4 \cdot 2 \cdot 6 - 3 \cdot 0 \cdot 4 = -6$$

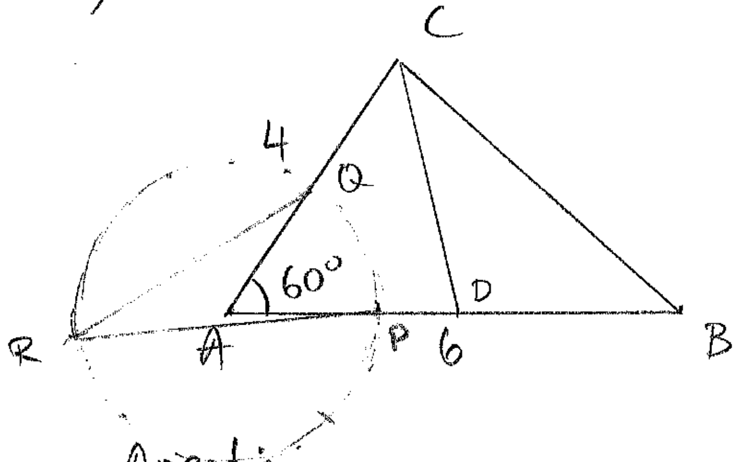
$$V_1 = |-6| = 6$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot 6 = \underline{\underline{2}}$$


Z
6
4
T
Y
D
C
8
6
A
B
-4
-2
2
-2
-4
2
4
6
8
X
-2
-4

Oppg. 3

a)



Areal:

$$T = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{6 \cdot \sqrt{3}}} \ (\approx 10{,}4)$$

b) Cosinussetninga:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2\, AB \cdot AC \cdot \cos A =$$

$$6^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 52 - 48 \cdot \frac{1}{2} = 28$$

$$BC = \sqrt{28} = \underline{\underline{2\sqrt{7}}} \quad (\approx 5{,}29)$$

Sinussetninga:

$$\frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin A}{BC}$$

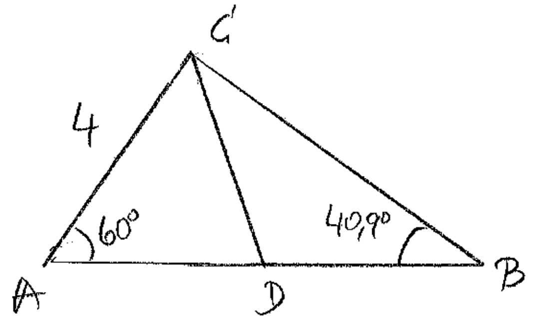
$$\sin B = \frac{AC}{BC} \cdot \sin A = \frac{4}{2\sqrt{7}} \cdot \sin 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$B = \sin^{-1}\sqrt{\frac{3}{7}} \approx 40{,}89^\circ \approx \underline{\underline{40{,}9^\circ}}$$

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 60^\circ - 40{,}89^\circ = 79{,}11^\circ$$

$$\angle C \approx \underline{\underline{79{,}1^\circ}}$$

c)



Arealet av $\triangle ADC$: T_1

— " — $\triangle BCD$: T_2

Skal ha: $T_1 = T_2$

Veit: $T_1 + T_2 = T = 6\sqrt{3}$

$$T_1 = \frac{T}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \sin A$$

$$AD = \frac{2T_1}{AC \cdot \sin A} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{4 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \underline{\underline{3}}$$

d) Sektoren har vinkelen 60°, så arealet blir $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$ av arealet av heile sirkelen. Sirkelen har radius $r=2$.

Arealet blir:

$$\frac{1}{6} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 2^2 = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}}$$

e) Ser av figuren at $\angle PRQ$ er ein periferivinkel tilsvarande sentralvinkelen $PAQ = 60^\circ$.
Vi veit då at

$$\angle PRQ = \frac{1}{2} \angle PAQ = \frac{60^\circ}{2} = \underline{\underline{30^\circ}}$$