Førelesing 8/11

① Presisering om innlevering (oppg. 8)

② Repetisjon

[?] Kva betyr „$\vec{u} = [2,5]$" ?

Eksempel

Gitt to vektorar i planet på koordinatform: $\vec{u} = [2,5]$ og $\vec{v} = [-1,3]$

Finn

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{u} - 3\vec{v}$

Gitt punkta $A(2,5)$ og $B(-1,3)$

c) Kva er avstanden mellom A og B?

d) Er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ parallelle

Gitt $\vec{a} = [1,3]$ og $\vec{b} = [1,7]$

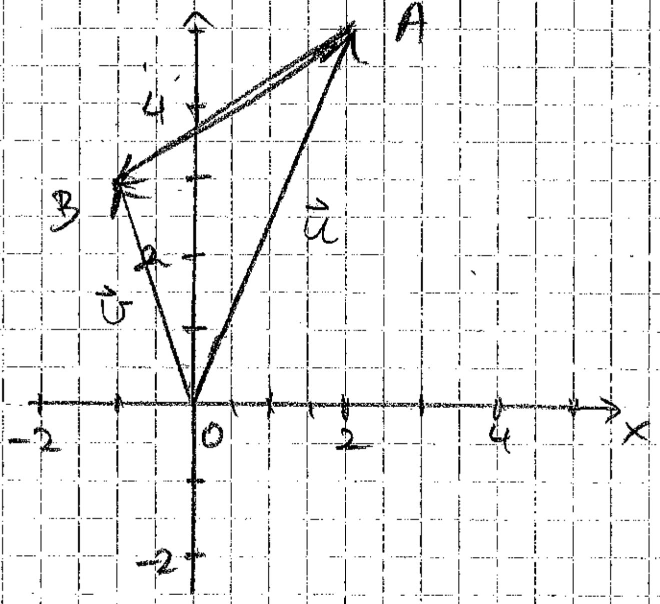
e) Uttrykk $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som lineær-kombinasjonar av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

a) $\vec{u} + \vec{v} = [2,5] + [-1,3] = [2+(-1), 5+3] = \underline{[1,8]}$

b) $\vec{u} - 3\vec{v} = [2,5] - 3\cdot[-1,3] = [2,5] - [-3,9] =$

$[2-(-3), 5-9] = \underline{[5,-4]}$

c)



Ser: $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$

Avstanden er lik lengda av vektoren $\overrightarrow{AB}$

Vidare: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} - \vec{u}$

$\overrightarrow{AB} = [-1, 3] - [2, 5] = [-3, -2]$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \quad (= |\overrightarrow{BA}|)$

Avstanden mellom A og B er $\underline{\underline{\sqrt{13}}}$

d) At $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle er det same som at $\vec{u} = t\vec{v}$ for ein passe skalar t.

$\vec{u} = t \cdot \vec{v}$

$[2, 5] = t \cdot [-1, 3]$

$[2, 5] = [-t, 3t]$

$2 = -t$ <u>og</u> $5 = 3t$

$t = -2$ og $t = \frac{5}{3}$

t kan ikkje ha to ulike verdiar samtidig; likninga har ikkje noko løysing.

$\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ikkje parallelle

e) Skal ha: $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$

$[2,5] = x \cdot [1,3] + y \cdot [1,7] = [x+y,\ 3x+7y]$

$2 = x + y$ (I)
$5 = 3x + 7y$ (II)

I: $y = 2 - x$

I i II: $3x + 7(2-x) = 5$
$3x + 14 - 7x = 5$
$-4x = 5 - 14 = -9$
$x = \frac{-9}{-4} = \frac{9}{4}$

I: $y = 2 - x = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$

Altså: $\vec{u} = \frac{9}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$

Skal også ha: $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$

$[-1,3] = [x+y,\ 3x+7y]$

$-1 = x + y$ (I)
$3 = 3x + 7y$ (II)

$I: \quad y = -1 - x$

I i II: $\quad 3x + 7\cdot(-1-x) = 3$

$$3x - 7 - 7x = 3$$

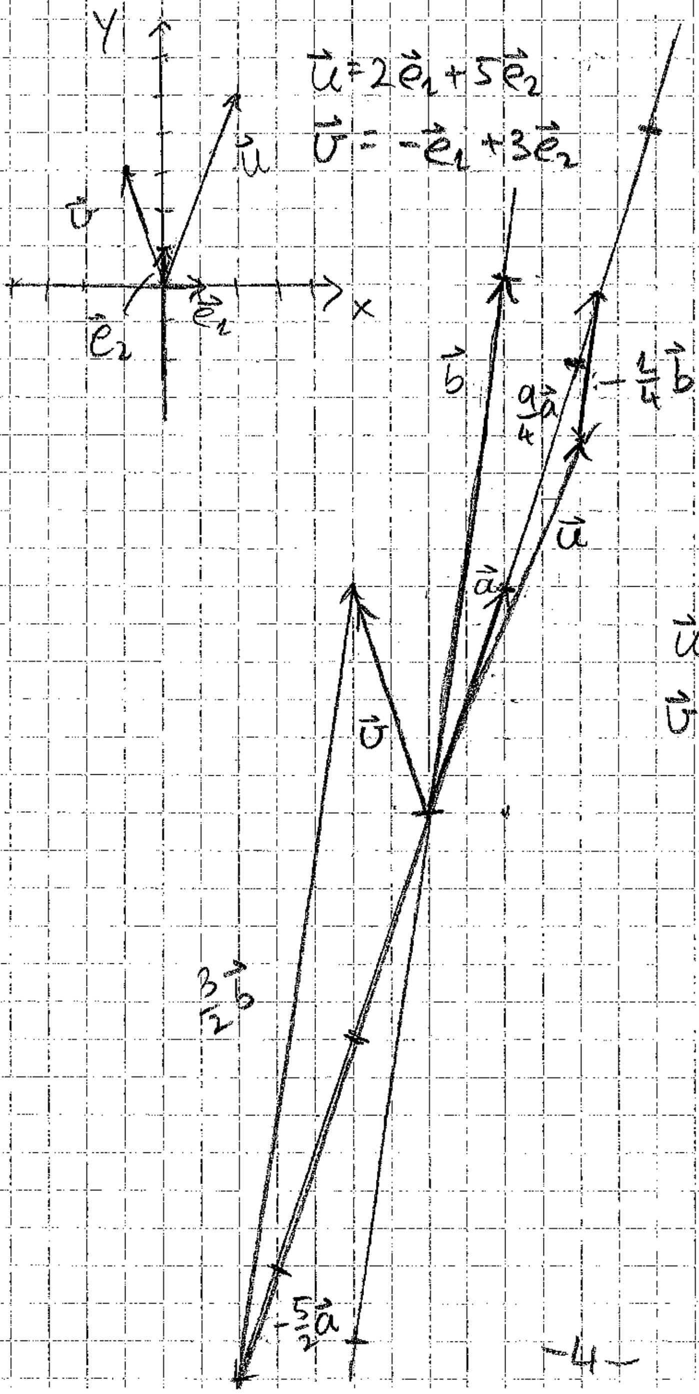
$$-4x = 3 + 7 = 10$$

$$x = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2}$$

$I: \quad y = -1 - x = -1 - \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}$

Altså

$$\underline{\underline{\vec{v} = -\frac{5}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}}}$$



$\vec{u} = \frac{9}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$

$\vec{v} = -\frac{5}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$

Poeng:

Dersom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikkje er parallelle, kan alle vektorar i same plan som $\vec{a}$ og $\vec{b}$ skrivast som ein lineærkombinasjon av $\vec{a}$ og $\vec{b}$ på ein eintydig måte.

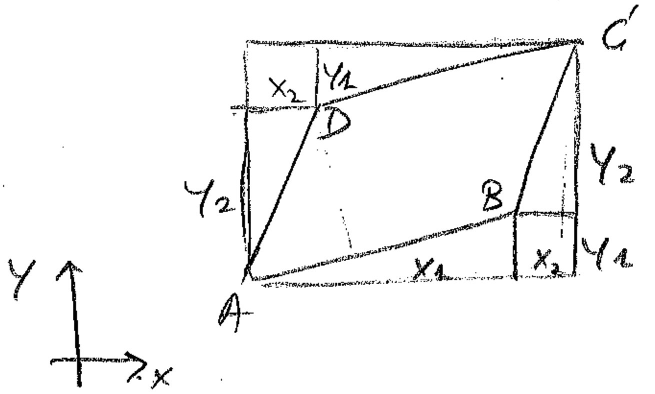
I rommet:

Dersom vektorane $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$ er lineært uavhengige, kan alle vektorar $\vec{v}$ i rommet skrivast som ein lineærkombinasjon av $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$ på ein eintydig måte.

At $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$ er lineært uavhengige betyr at ingen av dei er parallell med nokon av dei andre, og ingen av dei ligg i same plan som dei to andre.

3 Determinantar (13.6)

Parallellogram:



Ser:

$\vec{AB} = [x_1, y_1]$

$\vec{AD} = [x_2, y_2]$

Arealet av parallellogrammet er lik arealet av det store rektangelet minus arealet av fire parvis like trekantar og to like rektangel.

Areal av stort rektangel: $(x_1+x_2)\cdot(y_1+y_2)$

Areal av trekant 1: $\frac{1}{2}x_2 y_2$

——"—— 2: $\frac{1}{2}x_1 y_1$

Areal av lite rektangel: $x_2 y_1$

Areal av parallellogram:

$(x_1+x_2)(y_1+y_2) - 2\cdot\frac{1}{2}x_2y_2 - 2\cdot\frac{1}{2}x_1y_1 - 2\cdot x_2y_1 =$

$x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 - x_2y_2 - x_1y_1 - 2x_2y_1 =$

$x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_2y_1 = x_1y_2 - x_2y_1$

- Kallar dette uttrykket determinanten til vektorane $[x_1, y_1]$ og $[x_2, y_2]$

Skriv: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$

Ser: Dersom $\vec{AB}$ og $\vec{AD}$ hadde vore parallelle, ville arealet av parallellogrammet vore 0.

Altså: Vektorane $[x_1, y_1]$ og $[x_2, y_2]$ er parallelle hvis og berre hvis $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$.