Førelesing 18/11

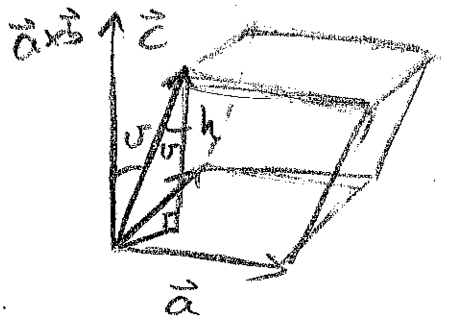
① – Dele ut oblig? Nemne: „arccos" det same som $\cos^{-1}$
Ros / ris
– „Ordliste" ~~på Fronter~~
– Repetere undervisingsplan neste veke

② Fullføre eksempel frå sist:

Gitt $\vec{a} = [4,1,0]$
$\vec{b} = [2,5,1]$
$\vec{c} = [3,3,7]$

Finn volumet av parallellepipedet bestemt av $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$.

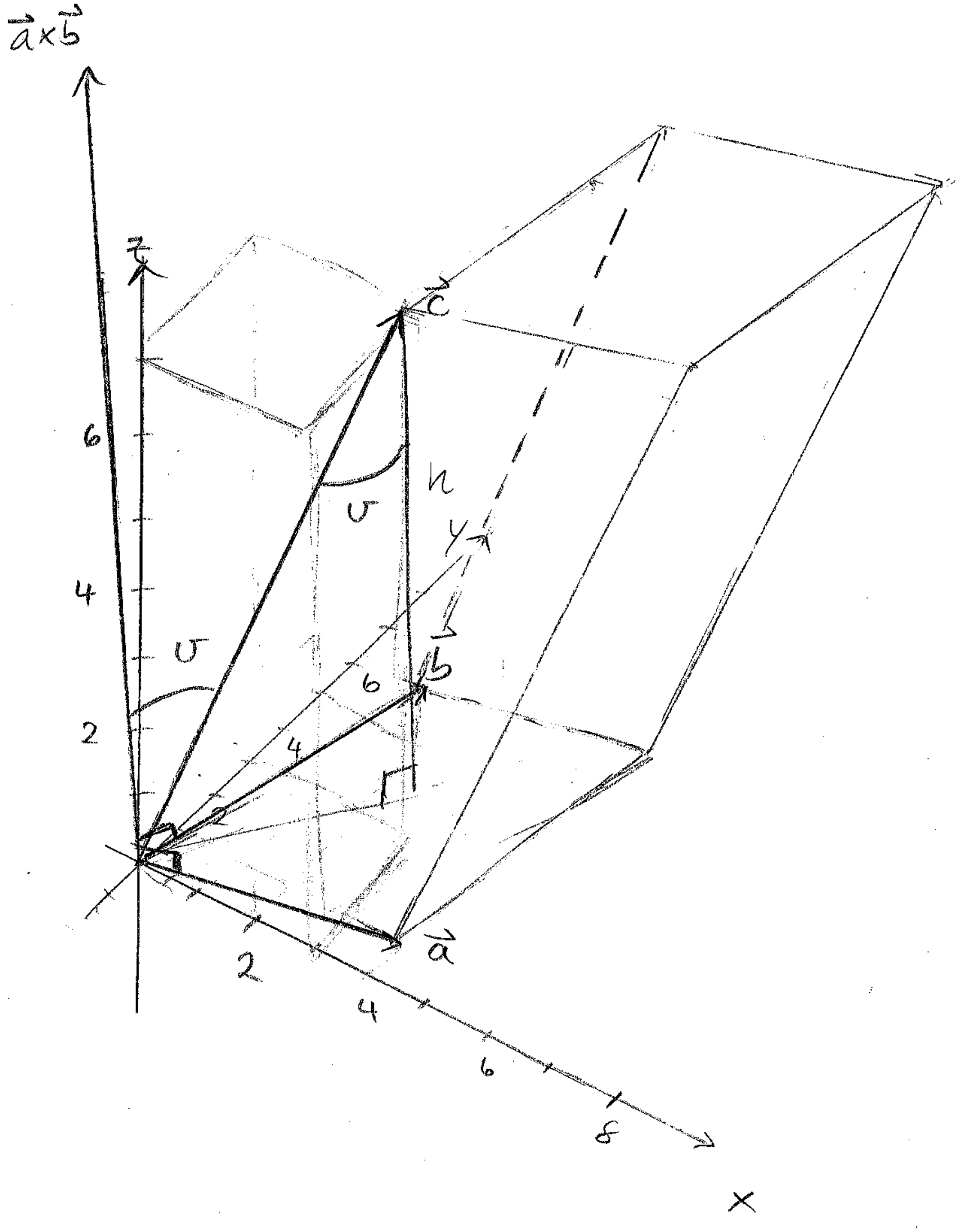
Har funne: $\vec{a} \times \vec{b} = [1,-4,18]$
Vart: Arealet av parallellogrammet i „botn"
er: $G = |\vec{a} \times \vec{b}|$
Volum: $V = Gh$



Ser: $\cos v = \frac{h}{|\vec{c}|}$, $h = |\vec{c}| \cdot \cos v$

v er også vinkelen mellom $(\vec{a} \times \vec{b})$ og $\vec{c}$

$$V = G \cdot h = \underbrace{|\vec{a} \times \vec{b}|}_{G} \cdot \underbrace{|\vec{c}| \cdot \cos v}_{h}$$



a×b
z
c
6
h
v
y
4
v
b
6
4
2
a
2
4
6
8
x

definisjon av skalarproduktet:

$$\vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos v$$

$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$:

$$V = |\vec{d}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos v = \vec{d} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$V = [1, -4, 18] \cdot [3, 3, 7] = 1 \cdot 3 + (-4) \cdot 3 + 18 \cdot 7 = \underline{\underline{117}}$$

Volum av parallellepiped bestemt av $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$:

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

Kan også reknast ut slik:

Med $\vec{a} = [x_1, y_1, z_1]$, $\vec{b} = [x_2, y_2, z_2]$ og $\vec{c} = [x_3, y_3, z_3]$:

V er absoluttverdien av

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Sjekk:

$$\left|\begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 7 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{matrix} = 4 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 0 - 0 - 4 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 7 =$$

$$20 \cdot 7 + 3 - 12 - 14 = 140 + 3 - 26 = \underline{117} \quad \text{OK}$$

③ Plan i rommet

[?] Kva bestemmer eit plan?

Diskutér.

„Eksempel"

Punkta $A(-1, 3, 7)$, $B(2, 2, 1)$ og $C(-4, 5, 3)$ definerar eit plan α.

a) Finn ei parameterframstilling for planet

b) Finn ei likning for planet.

Vi seier at punktet D, med koordinatane (x, y, z), ligg i planet α.

Påstand: $\vec{AD} = s\vec{AB} + t\vec{AC}$

[?] Kvifor?

[?] $\vec{OD}$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AC}$$

Med tal:

$$\vec{OD} = [x, y, z]$$

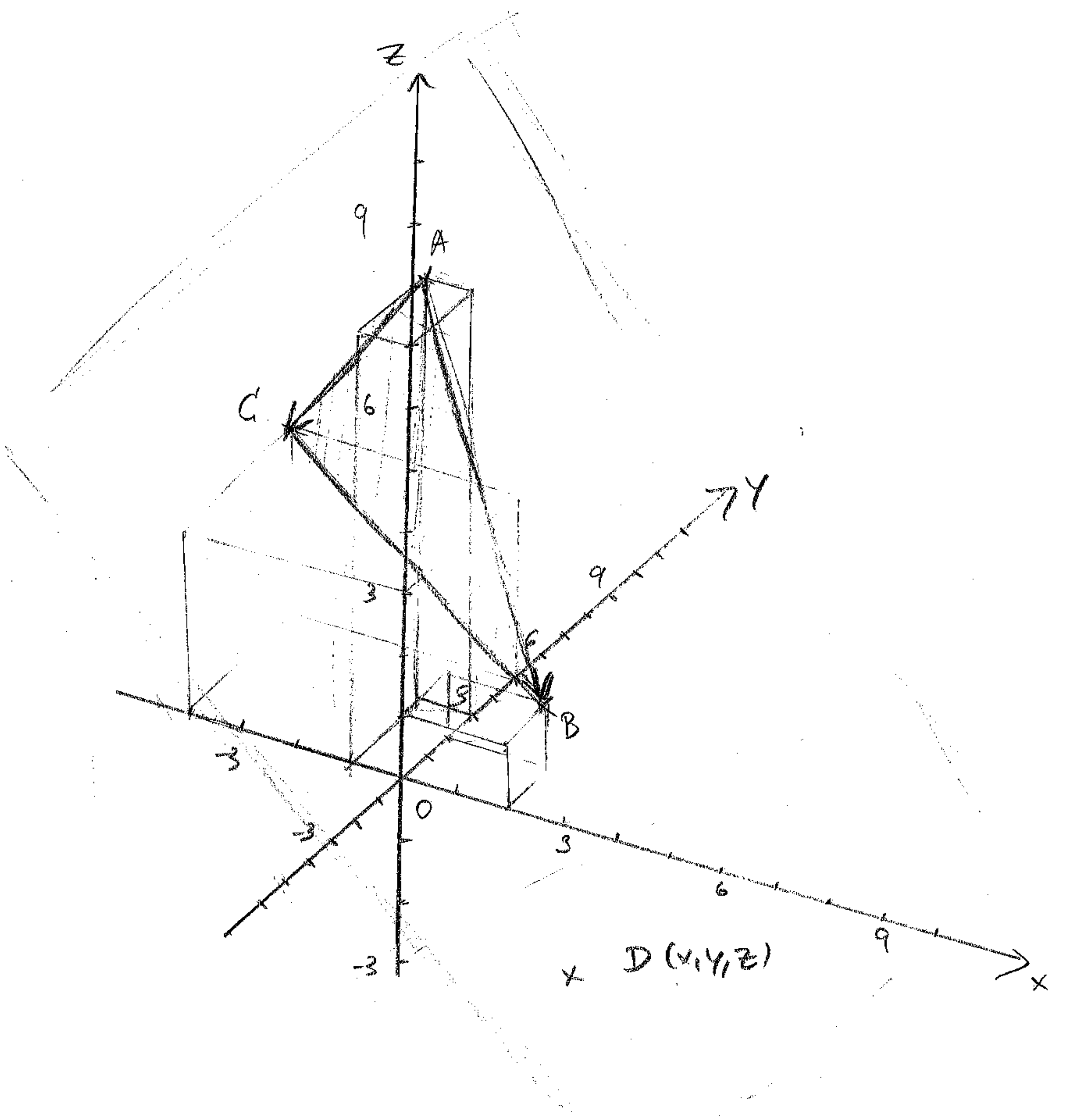
$$\vec{OA} = [-1, 3, 7]$$

$$\vec{AB} = [2-(-1), 2-3, 1-7] = [3, -1, -6]$$

$$\vec{AC} = [-4-(-1), 5-3, 3-7] = [-3, 2, -4]$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AC}$$

$$[x, y, z] = [-1, 3, 7] + s[3, -1, -6] + t[-3, 2, -4]$$


Z
Y
X
A
B
C
D (x,y,z)
0
3
6
9
-3
5

$[x, y, z] = [-1+3s-3t, 3-s+2t, 7-6s-4t]$

Altså:

$$\begin{cases} x = -1+3s-3t \\ y = 3-s+2t \\ z = 7-6s-4t \end{cases}$$

– Dette er ei parameterframstilling for α.

b) [?] Vektor som står normalt på både $\vec{AB}$ og $\vec{AC}$?

– $\vec{AB} \times \vec{AC}$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & -1 & -6 \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{matrix} =$$

$$\vec{e}_1 \cdot (-1)\cdot(-4) + \vec{e}_2 \cdot (-6)\cdot(-3) + \vec{e}_3 \cdot 3 \cdot 2 - \vec{e}_3 \cdot (-1)\cdot(-3) - \vec{e}_1 \cdot (-6)\cdot 2 - \vec{e}_2\, 3 \cdot (-4) =$$

$$4\vec{e}_1 + 18\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 3\vec{e}_3 + 12\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 =$$

$$16\vec{e}_1 + 30\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = [16, 30, 3] = \vec{n}$$

Veit: $\vec{n} \perp \vec{AB}$ og $\vec{n} \perp \vec{AC}$

[?] Kvifor må vi også ha at $\vec{n} \perp \vec{AD}$?

$$\vec{AD} = [x-(-1), y-3, z-7] = [x+1, y-3, z-7]$$

[?] $\vec{n} \perp \vec{AD} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{AD} = 0$

↑

Dette er likninga!

Rekner:

$$[16,30,3]\cdot[x+1,\ y-3,\ z-7]=0$$

$$16(x+1)+30(y-3)+3(z-7)=0$$

$$16x+16+30y-90+3z-21=0$$

$$\underline{16x+30y+3z-95=0}$$

Oppsummering (14.7, 14.8)

1) Dersom punktet $A(x_0,y_0,z_0)$ ligg i planet α og vektoren $\vec{n}=[a,b,c]$ står normalt på α, er dette likninga for planet:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

2) Dersom punktet $A(x_0,y_0,z_0)$ ligg i planet α og vektorane $\vec{a}=[a_1,a_2,a_3]$ og $\vec{b}=[b_1,b_2,b_3]$ er begge parallelle med α (og ikkje parallelle med kvarandre), er dette ei parameterframstilling for α:

$$\begin{cases} x=x_0+sa_1+tb_1 \\ y=y_0+sa_2+tb_2 \\ z=z_0+sa_3+tb_3 \end{cases}$$

Eksempel

Punktet $A(-3,2,0)$ ligg i planet α. Vidare er vektorane $\vec{a} = [3,2,1]$ og $\vec{b} = [0,1,2]$ begge parallelle med α.

a) Finn likninga for planet

b) Ligg punktet $B(3,1,4)$ i planet?

c) Linja l er gitt ved parameterframstillinga

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$$

Kvar skjer [skjærer] l planet α?

---

a) Normalvektor: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left| \begin{array}{ccc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{cc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} =$$

$$2 \cdot 2 \cdot \vec{e}_1 + \vec{0} + 3 \cdot 1 \cdot \vec{e}_3 - \vec{0} - 1 \cdot 1 \cdot \vec{e}_1 - 3 \cdot 2 \cdot \vec{e}_2 =$$

$$4\vec{e}_1 - \vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = [3, -6, 3]$$

Likning:

$$3(x - (-3)) + (-6) \cdot (y - 2) + 3(z - 0) = 0$$

$$3x + 9 - 6y + 12 + 3z = 0$$

$$3x - 6y + 3z + 21 = 0 \quad | :3$$

$$\underline{x - 2y + z + 7 = 0}$$

b) $x=3, y=1, z=4$

$x-2y+z+7 = 3-2\cdot 1+4+7 = 12 \neq 0$

[?] Er likninga oppfyld?

- Nei

Likninga er ikkje oppfyld. Difor ligg punktet B ikkje i planet α.

c) [?] Kor mange løysingar kan der vere?

Kan vere ingen, ei eller uendeleg mange; vanlegvis ei løysing.

$x=3t, \; y=2-t, \; z=3+5t$

Bestemmer t:

$$\underbrace{3t}_{x} - 2\cdot\underbrace{(2-t)}_{y} + \underbrace{(3+5t)}_{z} + 7 = 0$$

$$3t-4+2t+3+5t+7=0$$

$$10t = -6$$

$$t = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \; x = 3\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{9}{5}$$

$$y = 2-\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{10+3}{5} = \frac{13}{5}$$

$$z = 3+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = 3-3=0$$

Skjeringspunktet: $\underline{\underline{\left(-\frac{9}{5}, \frac{13}{5}, 0\right)}}$