Førelesing 16/11

① Minne om rekneøvingstimane (redusert).

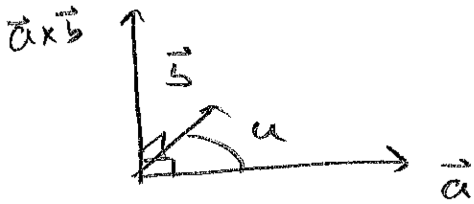
② Vektorprodukt

$\vec{a} \times \vec{b}$:

1) $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ og $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

2) $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{a} \times \vec{b}$ danner eit høgrehands-system

3) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin u$



③ Eksempel frå forrige notat

④ 3×3 determinant:

$$\left|\begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{array} = x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - z_1 y_2 x_3 - x_1 z_2 y_3 - y_1 x_2 z_3$$

For vektorproduktet:

$$[x_1, y_1, z_1] \times [x_2, y_2, z_2] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

(-ikkje tenkt å bevise dette).

Eksempel

I fysikken har vi formelen $\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$ der $\vec{F}$ er magnetiske kraft, q er ladninga til ein partikkel, $\vec{v}$ er farten til partikkelen og $\vec{B}$ er magnetfeltet.

Gitt at ~~magnetfeltet~~ har styrken 3,0 T $\left(T = \frac{Ns}{mC}\right)$ og peikar parallelt med z-aksen i eit gitt koordinatsystem, finn den magnetiske krafta på eit proton med farten $\vec{v} = [1{,}3\cdot 10^5\ m/s,\ 1{,}7\cdot 10^5\ m/s,\ 5{,}0\cdot 10^4\ m/s]$

Protonladning: $q = 1{,}60\cdot 10^{-19}\ C$

$\vec{B} \parallel z$, $|\vec{B}| = 3{,}0\ T$: $\vec{B} = [0, 0, 3{,}0T]$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ 1{,}3\cdot 10^5 m/s & 1{,}7\cdot 10^5 m/s & 5{,}0\cdot 10^4 m/s & 1{,}3\cdot 10^5 m/s & 1{,}7\cdot 10^5 m/s \\ 0 & 0 & 3{,}0T & 0 & 0 \end{array} \right| =$$

$$\vec{e}_1 \cdot 1{,}7\cdot 10^5 m/s\cdot 3{,}0T + 0 + 0 - 0 - 0 - \vec{e}_2\, 1{,}3\cdot 10^5 m/s \cdot 3{,}0T =$$

$$5{,}1\cdot 10^5\ m/s\cdot T\ \vec{e}_1 - 3{,}9\cdot 10^5\ m/s\cdot T\ \vec{e}_2 =$$

$$\left[5{,}1\cdot 10^5 \frac{N}{C},\ -3{,}9\cdot 10^5 \frac{N}{C},\ 0\right]$$

$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = 1{,}60 \cdot 10^{-19} C \cdot [5{,}1 \cdot 10^5 \frac{N}{C}, -3{,}9 \cdot 10^5 \frac{N}{C}, 0] =$

$[8{,}16 \cdot 10^{-14} N, -6{,}24 \cdot 10^{-14} N, 0]$

- Vise bilete av boble-kammer

(5) Nytt eksempel

Gitt $\vec{a} = [4, 1, 0]$ og $\vec{b} = [2, 5, 1]$.

a) Bestem $\vec{a} \times \vec{b}$.

b) Vis at $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ og $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$.

c) Finn arealet av parallellogramet bestemt av $\vec{a}$ og $\vec{b}$

d) vektoren $\vec{c} = [3, 3, 7]$ bestemmer, saman med $\vec{a}$ og $\vec{b}$ eit parallellepiped. Finn volumet av dette.

---

a) $\vec{a} \times \vec{b} = [4, 1, 0] \times [2, 5, 1] =$

$$\left|\begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{matrix} =$$

$\vec{e}_1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 + \vec{e}_3 \cdot 4 \cdot 5 - \vec{e}_3 \cdot 1 \cdot 2 - 0 - \vec{e}_2 \cdot 4 \cdot 1 =$

$[1, -4, 18]$

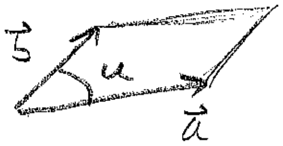
b) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = [4,1,0] \cdot [1,-4,18] =$

$4 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + 0 = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = [2,5,1] \cdot [1,-4,18] =$

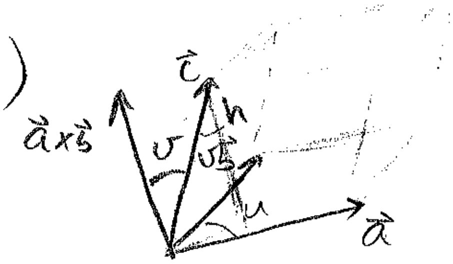
$2 \cdot 1 + 5 \cdot (-4) + 1 \cdot 18 = 0 \iff \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

c)



Areal: $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 18^2} = \underline{\underline{\sqrt{341}}} \quad (\approx 18{,}5)$

d)



Ser: $\cos v = \dfrac{h}{|\vec{c}|}$, $h = |\vec{c}| \cdot \cos v$

$V = G \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos v =$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = [1,-4,18] \cdot [3,3,7] =$

$1 \cdot 3 + (-4) \cdot 3 + 18 \cdot 7 = \underline{\underline{117}}$

Generelt:

Volumet av parallellepipedet bestemt av vektorene $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er lik absoluttverdien av tre-vektorproduktet:

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Dersom $\vec{a} = [x_1, y_1, z_1]$, $\vec{b} = [x_2, y_2, z_2]$ og $\vec{c} = [x_3, y_3, z_3]$:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Sjekkar dette mot vektorane i eksempelet:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{matrix} =$$

$$4 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 0 - 0 - 4 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 7 =$$

$$140 + 3 - 12 - 14 = 143 - 26 = \underline{117} \quad \text{OK}$$

⑥ Hvis tid:

$\boxed{2}$ Kva bestemmer ei linje?

- to punkt
- eitt punkt og ein retning

$\boxed{2}$ Kva bestemmer eit plan i rommet?

- tre punkt
- eitt punkt og ein normalvektor
- eitt punkt og to retningar